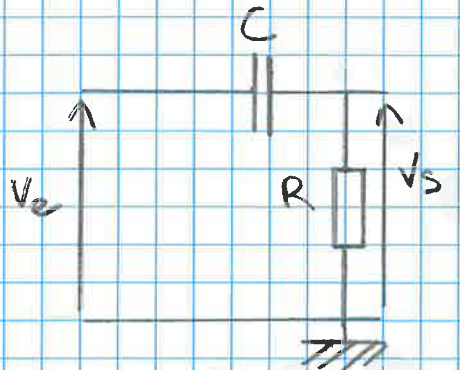
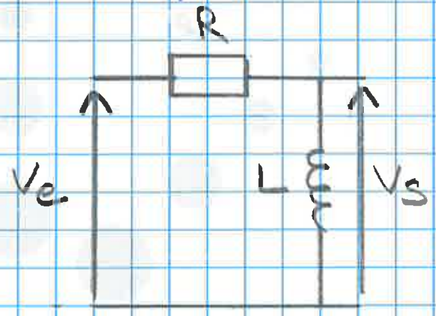
BLOC2 : Filtrage actif

Missions 2.1 : Filtrer des composantes fréquentielles (Ordre 1 passif)

Plusieurs montages sont possibles





si $\omega = 0$: C circuit ouvert
$V_s = 0$

si $\omega \to \infty$: C court circuit
$V_s = V_e$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

si $\omega = 0$: L court circuit
$V_s = 0$

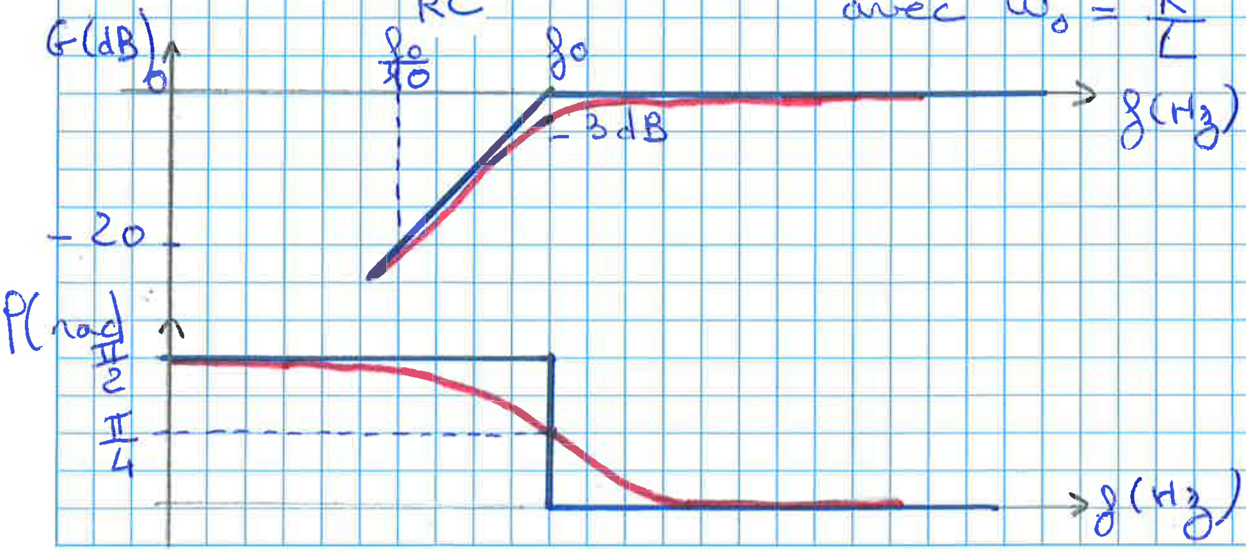
si $\omega \to \infty$: L circuit ouvert
$V_s = V_e$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

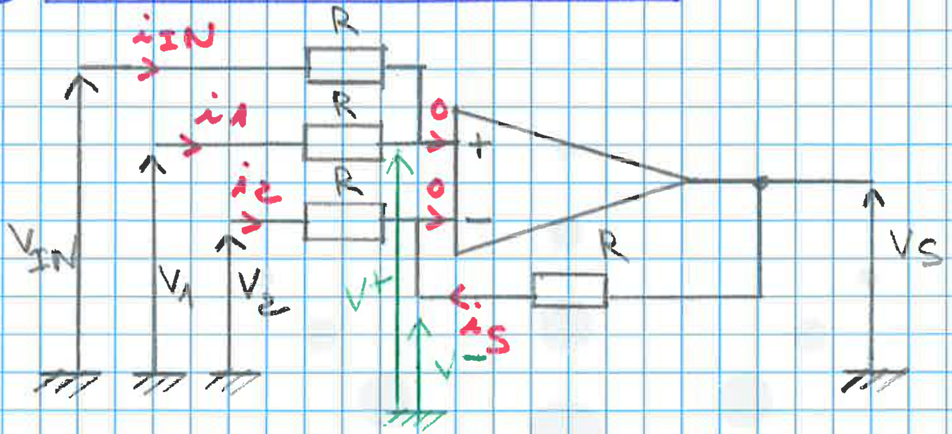
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{R}{L}$



Mission 2.2 : Filtres des composantes fréquentielles

- étude du sommateur :



$i_2 = \frac{V_2 - V^-}{R}$ $\quad i_S = \frac{V_S - V^-}{R}$

$i_2 + i_S = 0$ donc $V_2 - V^- + V_S - V^- = 0$

$V^- = \frac{V_2 + V_S}{2}$

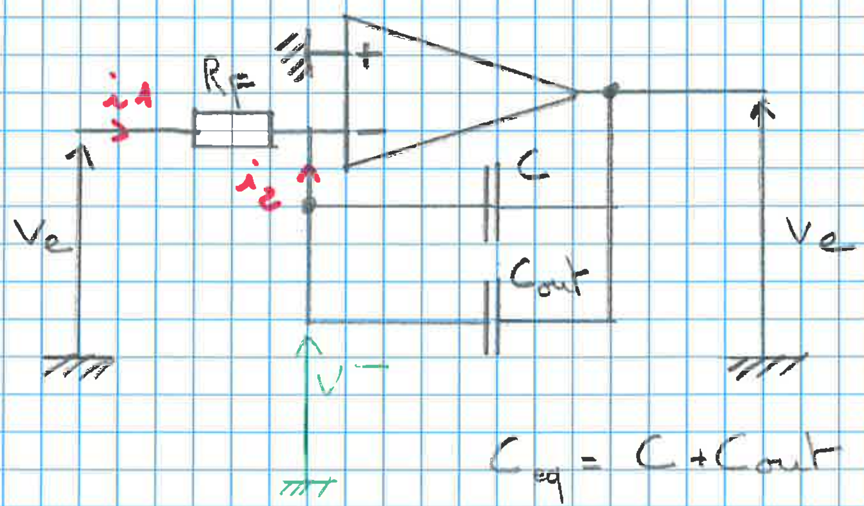
$i_{IN} = \frac{V_{IN} - V^+}{R}$ $\quad i_1 = \frac{V_1 - V^+}{R}$

$i_{IN} + i_1 = 0$ donc $V^+ = \frac{V_1 + V_{IN}}{2}$

l'AIL fonctionne en régime linéaire : $V^+ = V^-$

$V_2 + V_S = V_1 + V_{IN}$ donc $\boxed{V_S = V_{IN} + V_1 - V_2}$

- étude de l'intégrateur :



$C_{eq} = C + C_{out}$

$$i_1 = \frac{V_e - V^-}{R_F} \qquad i_2 = \frac{V_s - V^-}{\frac{1}{jC_{eq}\omega}} = j(V_s - V^-)C_{eq}\omega$$

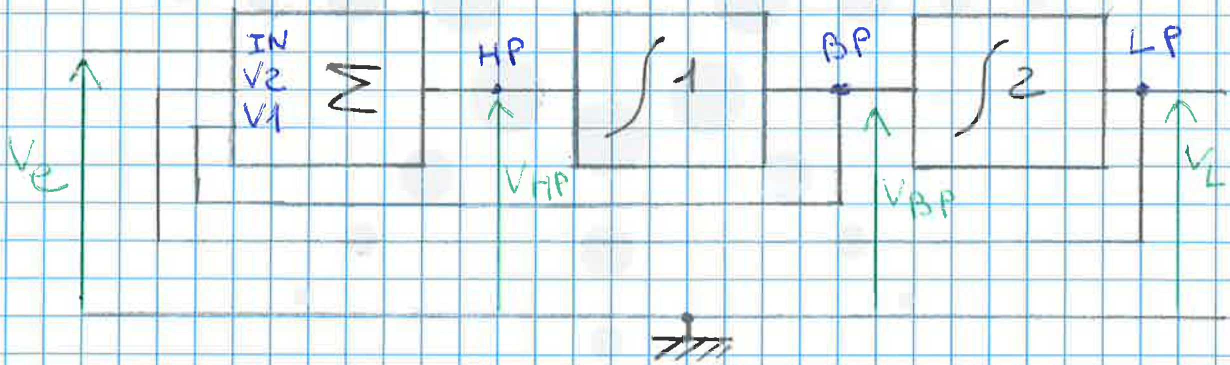
$$i_1 + i_2 = 0$$

$$V^+ = 0 \qquad V^+ = V^- \text{ donc } V^- = 0$$

$$\frac{V_e}{R_F} + jV_s C_{eq}\omega = 0$$

$$\boxed{\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{jR_F C_{eq}\omega}}$$

- étude du système complet :



$$V_{HP} = V_{IN} + V_1 - V_2 = V_{IN} + V_{BP} + V_{LP}$$

$$V_{BP} = -\frac{V_{HP}}{jR_F C_{eq}\omega}$$

$$V_{LP} = -\frac{V_{BP}}{jR_F C_{eq}\omega} = \frac{V_{HP}}{(jR_F C_{eq}\omega)^2}$$

$$\text{donc} \quad V_{HP} = V_{IN} - \frac{V_{HP}}{jR_F C_{eq}\omega} - \frac{V_{HP}}{(jR_F C_{eq}\omega)^2}$$

$$\boxed{\frac{V_{HP}}{V_{IN}} = \frac{(jR_F C_{eq}\omega)^2}{1 + jR_F C_{eq}\omega + (jR_F C_{eq}\omega)^2}}$$

$$H_{HP} = \frac{V_{HP}}{V_{IN}} = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j2m\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad 2m = 1 \qquad \omega_0 = \frac{1}{R_F C_{eq}}$$

$$V_{BP} = -\frac{V_{HP}}{j R_F C_{eq} \omega} = -\frac{V_{IN}}{j R_F C_{eq} \omega} \cdot \frac{(j R_F C_{eq} \omega)^2}{1 + j R_F C_{eq} \omega + (j R_F C_{eq} \omega)^2}$$

$$\boxed{\frac{V_{BP}}{V_{IN}} = -\frac{j R_F C_{eq} \omega}{1 + j R_F C_{eq} \omega + (j R_F C_{eq} \omega)^2}}$$

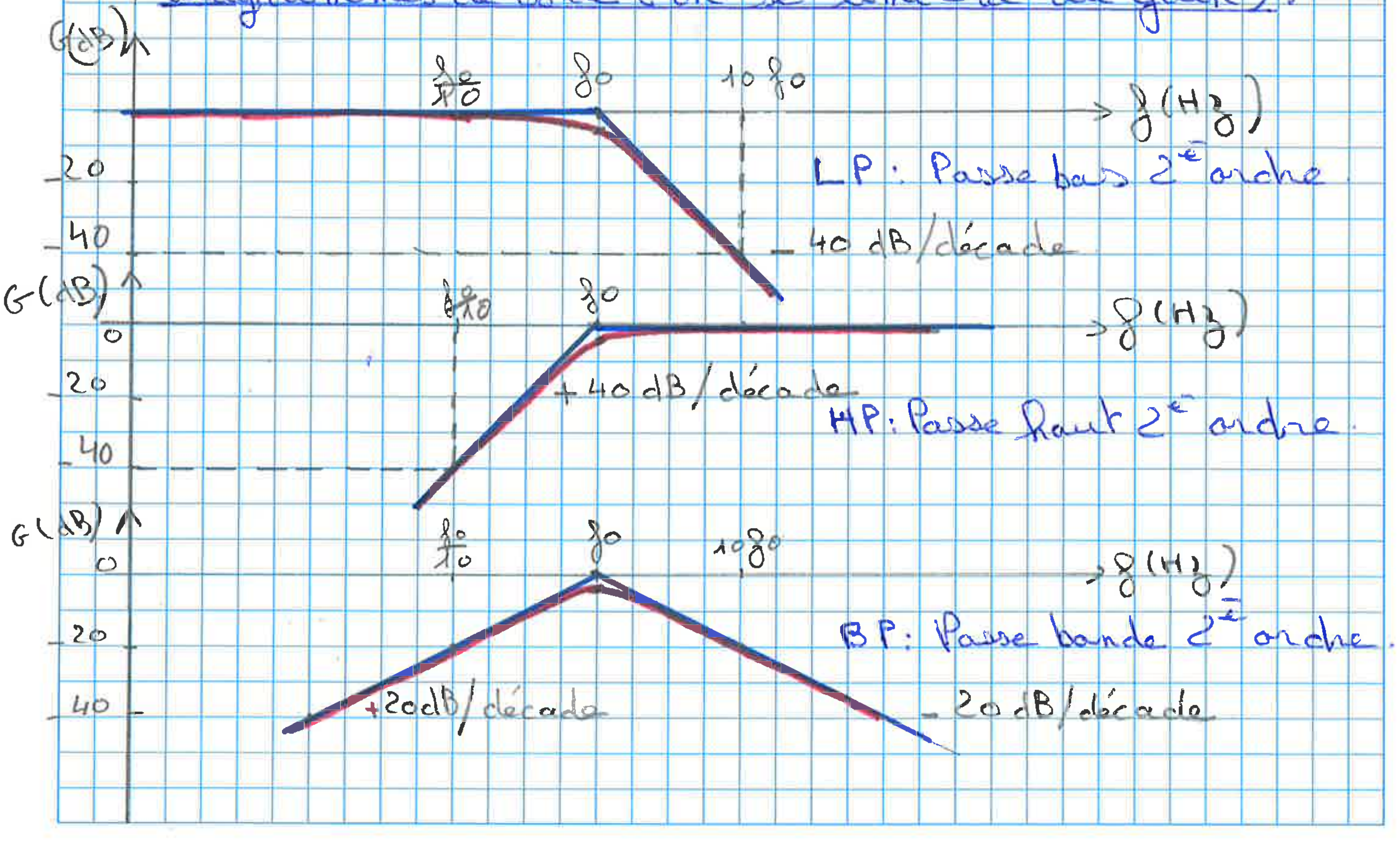
$$\frac{V_{BP}}{V_{IN}} = -\frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j 2m \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = H_{BP}$$

$$V_{LP} = \frac{V_{HP}}{(j R_F C_{eq} \omega)^2} = \frac{V_{IN}}{(j R_F C_{eq} \omega)^2} \cdot \frac{(j R_F C_{eq} \omega)^2}{1 + j R_F C_{eq} \omega + (j R_F C_{eq} \omega)^2}$$

$$\boxed{\frac{V_{LP}}{V_{IN}} = \frac{1}{1 + j R_F C_{eq} \omega + (j R_F C_{eq} \omega)^2}}$$

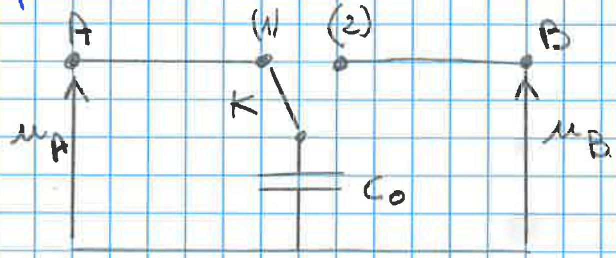
$$\frac{V_{LP}}{V_{IN}} = \frac{1}{1 + j 2m \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = H_{LP}$$

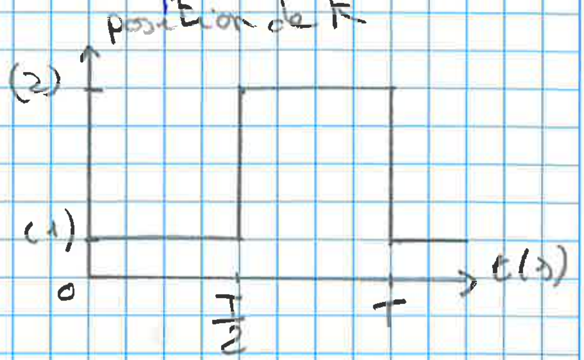
diagrammes de Bode (on se limitera au gain) :



Mission 2.3 : Filtrer des composantes fréquentielles autrement

- **Capacité commutée :**





1) Charge stockée par C_0

On va considérer que u_A et u_B ne varient pas entre 0 et T et que $u_A > u_B$.

de 0 à $\frac{T}{2}$: $Q_1 = C_0\, u_A$

de $\frac{T}{2}$ à T : $Q_2 = C_0\, u_B$

2) Quantité de charges qui passe de A à B :

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = C_0 (u_A - u_B)$$

3) courant moyen : pendant un temps T

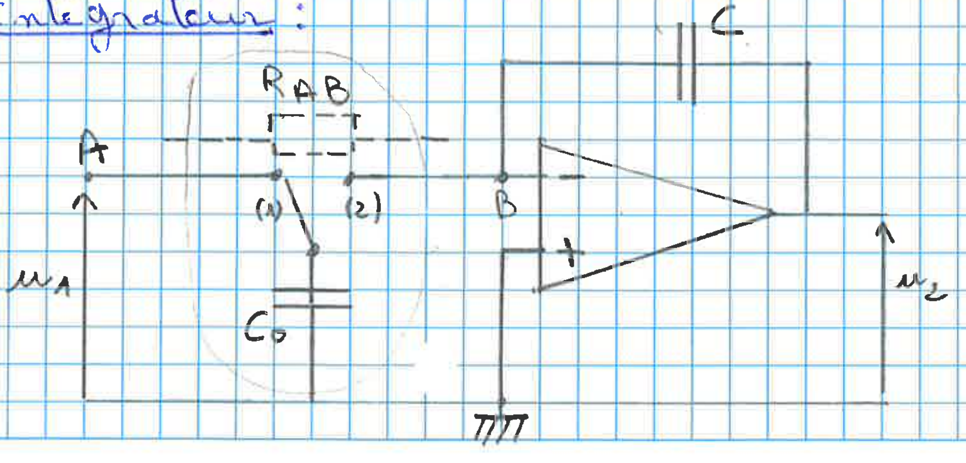
$$I_{moy} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{C_0}{T}(u_A - u_B)$$

4) résistance équivalente RAB :

$$I_{moy} = \frac{u_A - u_B}{R_{AB}} = \frac{C_0}{T}(u_A - u_B)$$

donc $\boxed{R_{AB} = \frac{T}{C_0} = \frac{1}{f\, C_0}}$ f : fréquence de commutation de K.

- **Intégrateur :**



1) En reprenant les résultats de l'étude de l'intégrateur de la Mission 2.2 :

$$T(j\omega) = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{j R_{AB} C \omega} = -\frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{R_{AB} C}$

2) On remplace $R_{AB} = \frac{1}{f C_0}$

$$\boxed{T(j\omega) = -\frac{f C_0}{j C \omega}}$$

pour éviter les ambiguités entre f et ω appelons $f = f_{clock}$.

$$T(j\omega) = -\frac{f_{clock} C_0}{j C \omega} = -\frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0 = f_{clock} \cdot \frac{C_0}{C}$$

3) L'intérêt de ce montage est de modifier la fréquence de coupure du filtre en modifiant la fréquence f_{clock}.

Etude du MAX296 :

Le circuit MAX296 est un filtre passe bas du 8ème ordre à capacité commutée. La fréquence du signal CLOCK détermine la fréquence de coupure du filtre.

- Entrée INPUT : Entrée du signal à filtrer
- Entrée CLK : Entrée du signal d'horloge qui pilote le "commutateur K"
- Sortie OUT : Sortie du signal filtré.

1) Sur la première page de la documentation technique, il y a une rubrique notée "Features" qui nous donne les renseignements suivants :

- Clock-Tunable Corner-Frequency range : 0,1 Hz to 50 kHz (MAX296)
  donc $\underline{f_{max}\,(INPUT) = 50\ kHz}$ *
- Clock to Corner Frequency Ratio : 50 : 1 (MAX296)

Cela veut dire que la fréquence sur l'entrée CLOCK doit être 50 fois la fréquence de coupure du filtre donc $50 \times 50\ kHz = 2{,}5\ MHz$

$\underline{f_{max}\,(CLOCK) = 2{,}5\ MHz}$

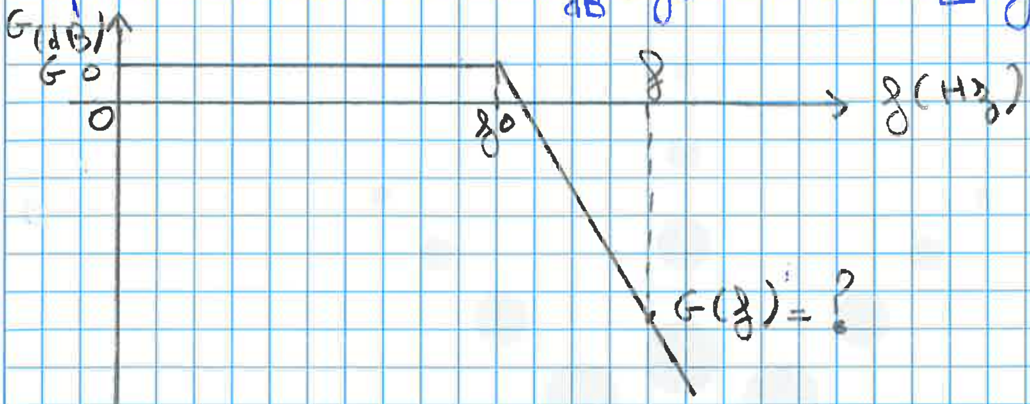
* Le signal sur l'entrée INPUT n'est pas limité réellement en fréquence. Le filtre a une bande passante programmable jusqu'à 50 kHz. Au dessus de f_0 (fréquence de coupure du filtre), les fréquence seront atténuées.

2) - si $f_0 = 3\ kHz$: $F_{CLOCK} = 50 \times 3.10^3 = \underline{150\ kHz}$.

- si $f = 300\ Hz$ alors $f = \frac{f_0}{10}$: $\underline{G_{dB} = 0\ dB}$
- si $f = 30\ kHz$ alors $f = 10 f_0$. Le filtre a une pente de $-8 \times 20 = -160\ dB/décade$

$\underline{G_{dB} = -160\ dB}$

De façon générale en dehors de la bande passante et pour un ordre n, le gain asymptotique peut s'écrire : $G_{dB}(f) = -20n[\log(f) - \log(f_0)] + G_0$



- si $f = 5$ kHz : $G_{dB} = -20.8[\log(5\,kHz) - \log(3.kHz)] + 0\,dB$

$$\underline{G_{dB} = -35\ dB.}$$

3) <u>Avec un filtre du second ordre (type RAUCH) et $f_0 = 3$ kHz</u> :

En dehors de la bande passante le gain asymptotique est $G_{dB} = -20\times 2[\log(f) - \log(f_0)] + G_0$

Dans notre cas nous ne connaissons pas G_0.

Donc :

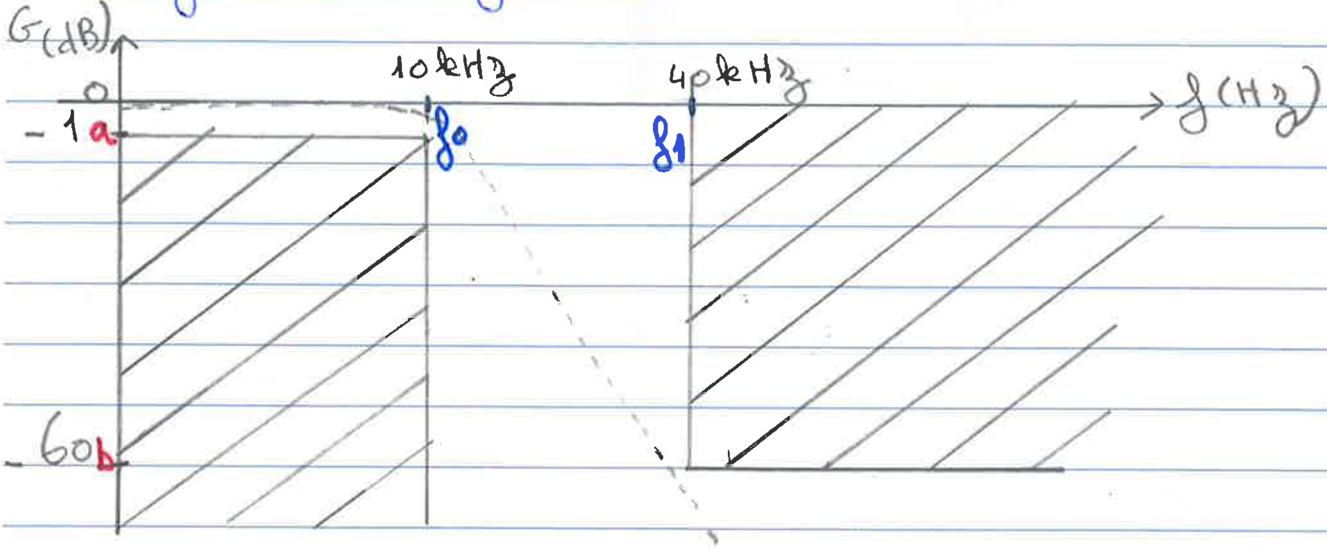
$$\begin{cases} G_{dB}(30\ kHz) = -40\ dB + G_0 \\ G_{dB}(5\ kHz) = -8{,}8\ dB + G_0 \end{cases}$$

Mission 2.4 : Réaliser un filtre à partir d'un gabarit cahier des charges sur un filtre de Butterworth :

gain supérieur à -1dB jusqu'à 10 kHz

gain inférieur à -60dB à partir de 40 kHz.

1) gabarit du filtre :



2) ordre minimal du filtre n :

$$n \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\log\left(\frac{10^{-a/10}-1}{10^{-b/10}-1}\right)}{\log\left(\frac{f_0}{f_1}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log\left(\frac{10^{1/10}-1}{10^{60/10}-1}\right)}{\log\left(\frac{10.10^3}{40.10^3}\right)} = 5,468$$

donc $\boxed{n = 6}$

3) pulsation de coupure :

$$f_{c,0} = \frac{f_0}{(10^{-a/10}-1)^{1/2n}} = \frac{10.10^3}{(10^{1/10}-1)^{1/12}} = 11,192 \text{ kHz}.$$

$$f_{c,1} = \frac{f_0}{(10^{-b/10}-1)^{1/2n}} = \frac{40.10^3}{(10^{6/10}-1)^{1/12}} = 12,649 \text{ kHz}.$$

$$f_c = \sqrt{f_{c0} \cdot f_{c1}} = (11{,}192.10^3 . 12{,}649.10^3)^{1/2} = \boxed{11{,}898\ kHz = f_c}$$

4) fonction de transfert :

En utilisant le tableau $B_n(p)$

$$B_6(p) = (p^2 + 0{,}5176p + 1)(p^2 + 1{,}414p + 1)(p^2 + 1{,}9319p + 1)$$

avec $p = j\dfrac{\omega}{2\pi f_c}$

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{B_6(p)} = \frac{1}{(p^2 + 0{,}5176p + 1)(p^2 + 1{,}414p + 1)(p^2 + 1{,}9319p + 1)}}$$

D'un point de vue opérationnel, il faut déterminer les cellules (de Rauch ou de Sallen-Key) qui incarneront les polynômes du tableau. Pour l'ordre 6, il s'agit de cascader 3 cellules de Rauch, par exemple avec les 3 polynômes de $B_6(p)$. Il faut se rappeler que la variable complexe est normalisée en pulsation. En d'autres termes, la fonction de transfert s'écrit, en pulsation :

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(j^2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + 0{,}5176 j\frac{\omega}{\omega_c} + 1\right)\left(j^2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + 1{,}414 j\frac{\omega}{\omega_c} + 1\right)\left(j^2\frac{\omega^2}{\omega_c^2} + 1{,}9319 j\frac{\omega}{\omega_c} + 1\right)}$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) . H_2(j\omega) . H_3(j\omega)$$

avec $H_n(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\,2m\frac{\omega}{\omega_c} + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\,0,5176\,\frac{\omega}{\omega_c} + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \qquad \omega_c = 2\pi f_c$$

$2\,m_1 = 0,5176$ donc $m_1 = 0,2588$

même raisonnement pour $H_2(j\omega)$ et $H_3(j\omega)$

$2\,m_2 = 1,414$ donc $m_2 = 0,707$

$2\,m_3 = 1,9319$ donc $m_3 = 0,96595$

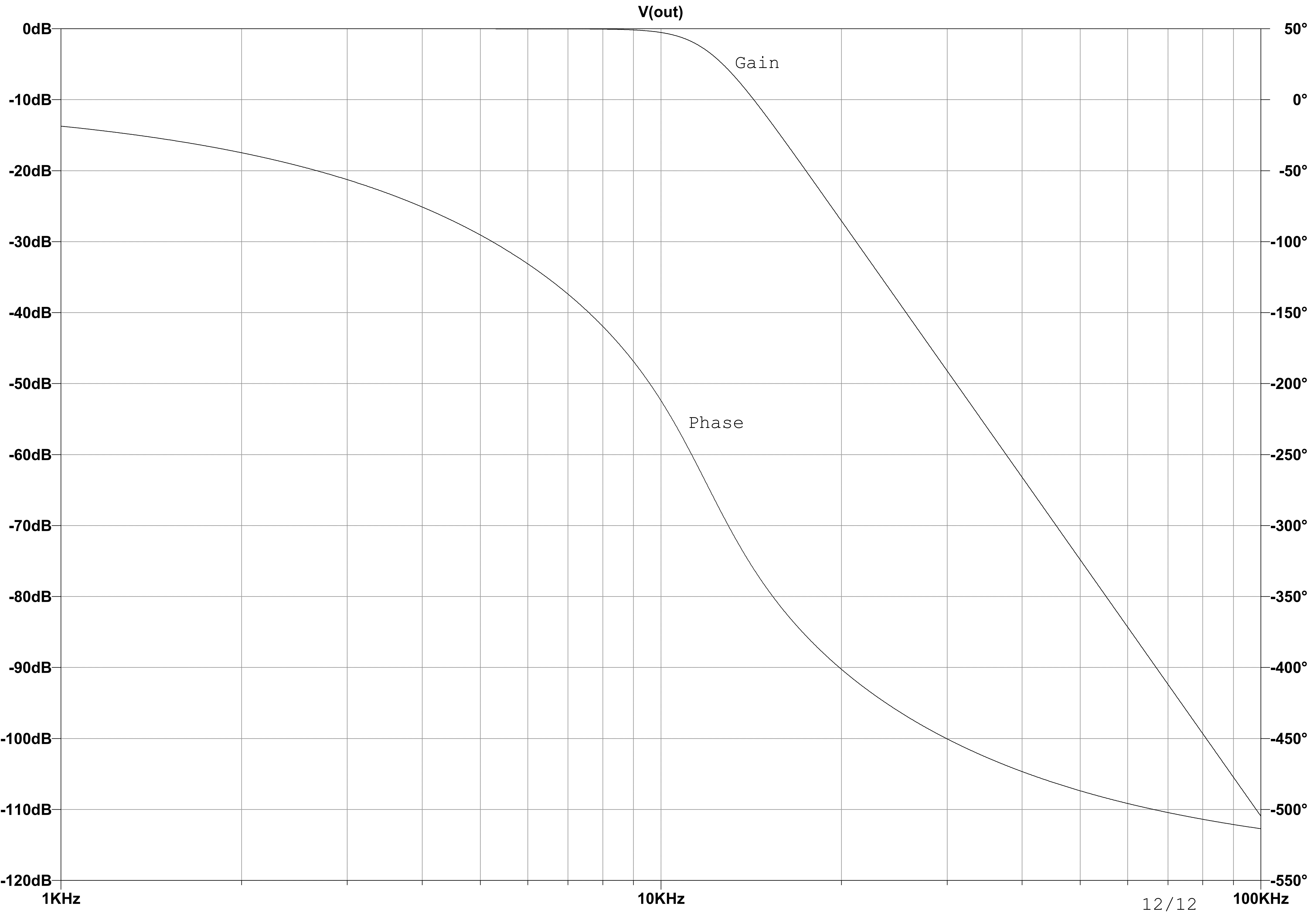
On simule le filtre passe bas d'ordre 6 sur LTSPICE. Les résultats sont :

à $f = 10\ \text{kHz}$ $\quad G_{dB} = -0,5317\ \text{dB} > -1\ \text{dB}$

$f = 40\ \text{kHz}$ $\quad G_{dB} = -63,1971\ \text{dB} < -60\ \text{dB}$

$f = 11,8829\ \text{kHz}$ $\quad \begin{cases} G_{dB} = -3\ \text{dB} \\ \varphi = -269,53^\circ \ (\simeq 6 \times -45^\circ = -270^\circ) \end{cases}$

Nous avons donc bien respecté le cahier des charges. Le diagramme de bode est donné page suivante.


V(out)
0dB
-10dB
-20dB
-30dB
-40dB
-50dB
-60dB
-70dB
-80dB
-90dB
-100dB
-110dB
-120dB
50°
0°
-50°
-100°
-150°
-200°
-250°
-300°
-350°
-400°
-450°
-500°
-550°
Gain
Phase
1KHz
10KHz
100KHz