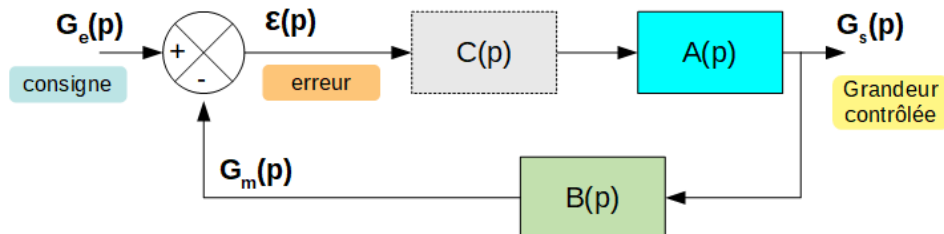


TD 4

TD 4 / ASSERVIR UN SYSTÈME

On s'intéresse au système bouclé suivant :



où :

- $A(p)$: système à asservir
- $B(p)$: système de mesure (retour) de la grandeur à asservir
- $C(p)$: correcteur de l'asservissement
- $G_e(p)$: grandeur physique de consigne
- $G_s(p)$: grandeur physique de sortie
- $\varepsilon(p)$: erreur entre la consigne et la sortie

Mission 1a - Boucle ouverte

Calculez la fonction de transfert en boucle ouverte : $TF_{BO}(p) = \frac{G_m(p)}{\varepsilon(p)}$

$$TF_{BO}(p) = \frac{G_m(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) \cdot A(p) \cdot B(p)$$

Mission 1b - Boucle fermée

En boucle fermée, on désire que le système :

- suive la consigne en régime établi (précision)
 - élimine les perturbations (rejet des perturbations)
 - ait une dynamique rapide
1. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée, entre la consigne et la grandeur contrôlée :

$$TF_{BF}(p) = \frac{G_s(p)}{G_e(p)}$$

On notera $L(p) = A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)$.
 2. Que devient l'expression précédente $TF_{BF}(p)$?
 3. Ce système peut-il être instable ?

Boucle fermée

On a $G_s(p) = C(p) \cdot A(p) \cdot \varepsilon(p)$ et $\varepsilon(p) = G_e(p) - B(p) \cdot G_s(p)$

On obtient alors : $G_s(p) = C(p) \cdot A(p) \cdot (G_e(p) - B(p) \cdot G_s(p))$

Ce qui donne :

$$TF_{BF}(p) = \frac{G_s(p)}{G_e(p)} = \frac{A(p) \cdot C(p)}{1 + A(p) \cdot C(p) \cdot B(p)}$$

En remplaçant par $L(p)$, on obtient alors :

$$TF_{BF}(p) = \frac{G_s(p)}{G_e(p)} = \frac{A(p) \cdot C(p)}{1 + L(p)}$$

Instabilité

Il peut devenir instable si pour une valeur de fréquence (pulsation), $L(p) = -1$ (nombre réel de valeur égale à -1).

Il existe des critères de stabilité basés sur les pôles de la fonction de transfert qui seront vus dans le cours d'automatique de 2A.

Début de démonstration

La réponse en fréquence d'un système peut se mettre sous la forme : $T_{FTBF}(p) = N(p)/D(p)$ où $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes en p .

Il est possible par décomposition en éléments simples d'obtenir la forme suivante :

$$T_{FTBF}(p) = \sum_k \frac{c_k}{p - a_k}$$

où les a_k sont réels ou complexes conjugués, ce sont les pôles de la fonction de transfert $T(p)$.

Par fonction de Laplace inverse, on peut montrer que l'application d'un dirac sur un tel système amène la sortie à évoluer de la façon suivante :

$$s(t) = \sum_k c_k \cdot e^{a_k \cdot t}$$

Cette expression tend vers une valeur finie (amortissement) lorsque les **pôles** a_k de la fonction de transfert sont à **valeurs réelles négatives**. C'est une condition nécessaire à la stabilité d'un système.

Stabilité d'un système

Certains systèmes bouclés peuvent devenir instable si la fonction de transfert en boucle ouverte devient réelle (pour certaines fréquences) et de valeur inférieure à -1. En ajoutant des éléments correcteurs, il est possible de modifier le comportement et ainsi éviter que le système ne devienne instable, tout en essayant de le rendre plus rapide et plus robuste.

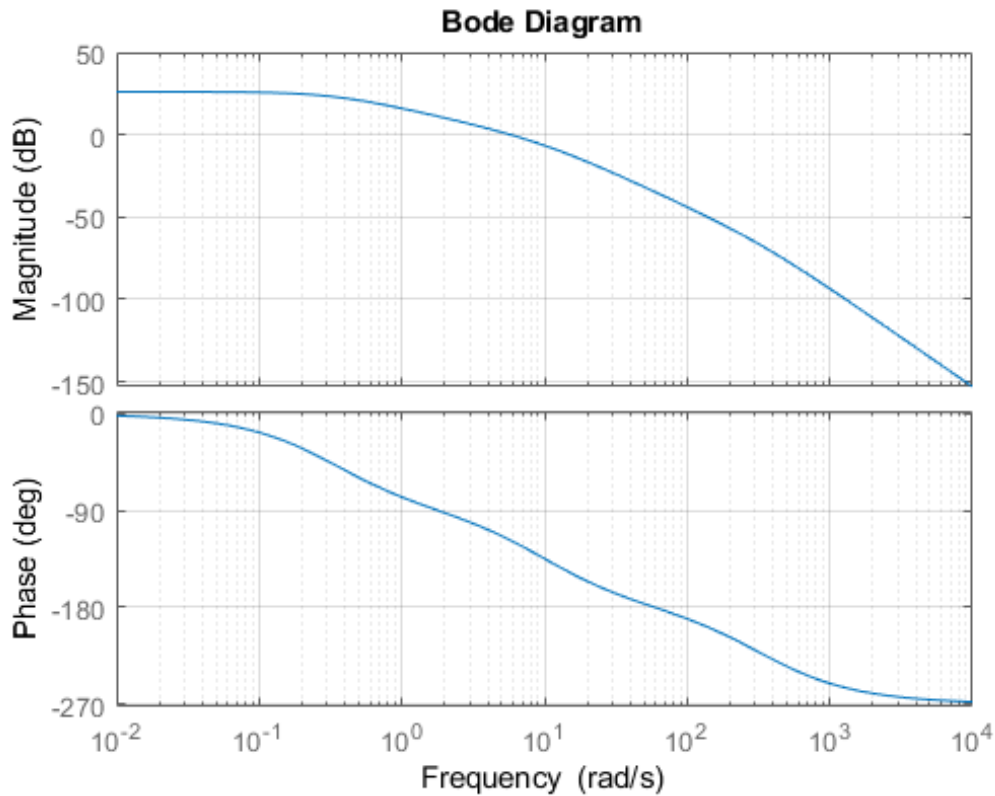
Pour estimer les risques d'instabilité, on s'intéresse aux marges de gain et de phase d'un système en boucle ouverte, qui déterminera ensuite sa robustesse en boucle fermée.

Le point critique à ne pas franchir est le point -1, c'est à dire la pulsation pour laquelle $|L(p)| = 1 = 0dB$ et $arg(L(p)) = -\pi$.

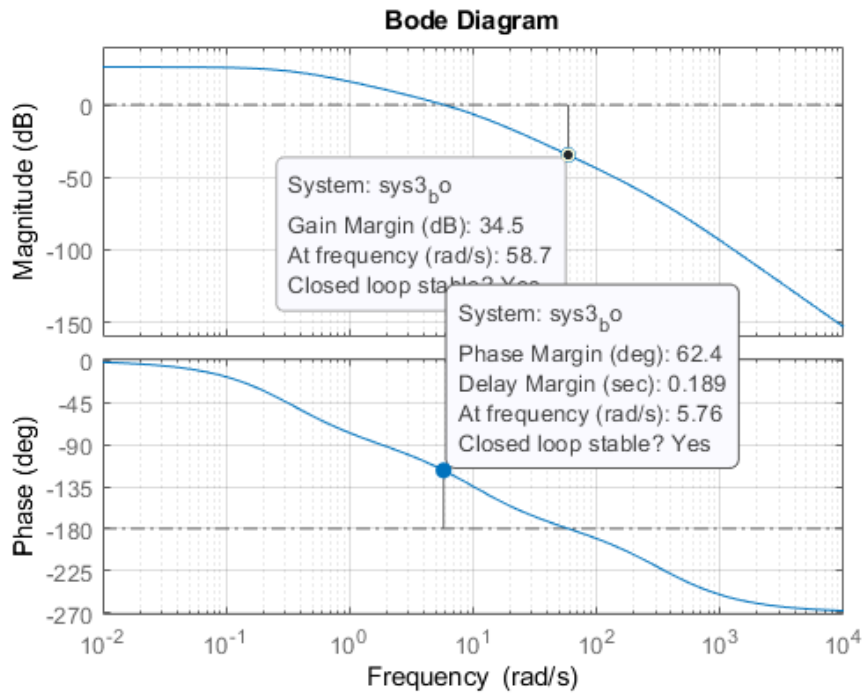
Cette condition n'est pas suffisante pour garantir la stabilité d'un système bouclé. Il existe un ensemble d'autres règles permettant d'identifier cette stabilité, qui ne seront pas décrits cette année.

Mission 2a - Stabilité d'un système

On propose d'étudier le système dont on donne le diagramme de Bode suivant :



Mesurez les marges de gain et de phase et concluez sur sa stabilité en boucle fermée.

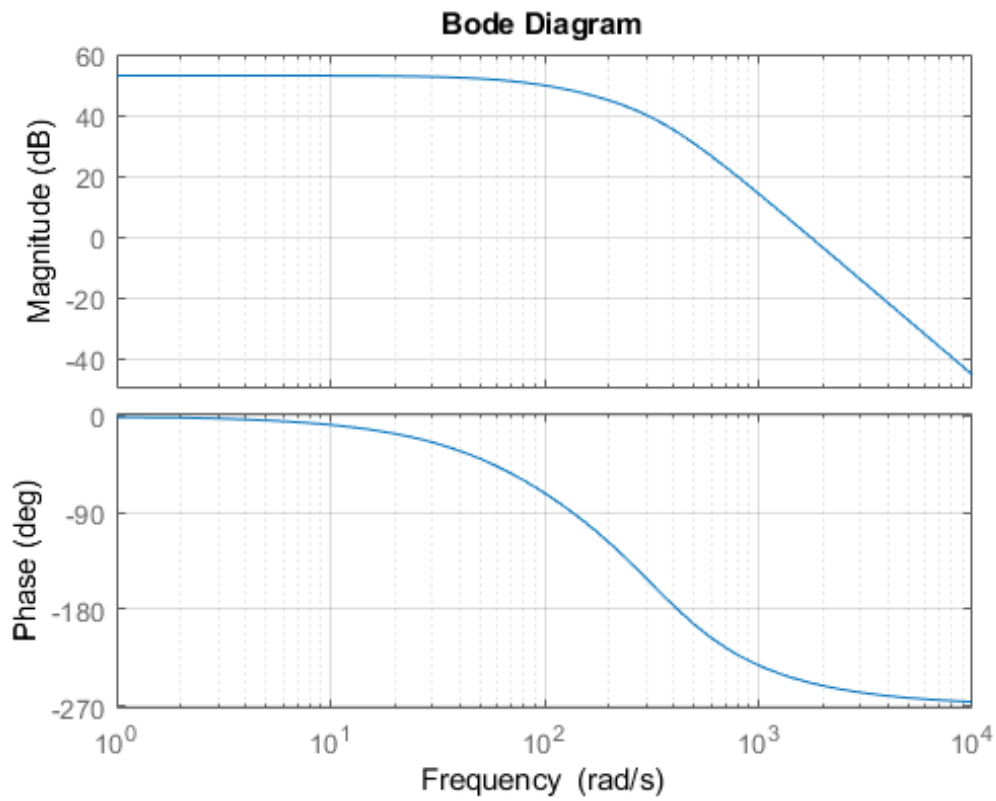


Quelques informations sur ces marges :

- **Un système est stable en BF si la marge de phase est positive.**
- La marge de gain correspond au gain supplémentaire maximum que l'on peut donner au système en BO sans risquer de le rendre instable en BF.
- Plus les marges sont grandes, plus robuste est la stabilité

Mission 2b - Stabilité d'un système

Qu'en est-il de ce nouveau système dont on donne le diagramme de Bode ?



Ce système est instable... Pour $G = 0\text{dB}$, on a une phase inférieure à -180deg .

La marge de phase est donc négative.

Mission 3a - Correction d'un système

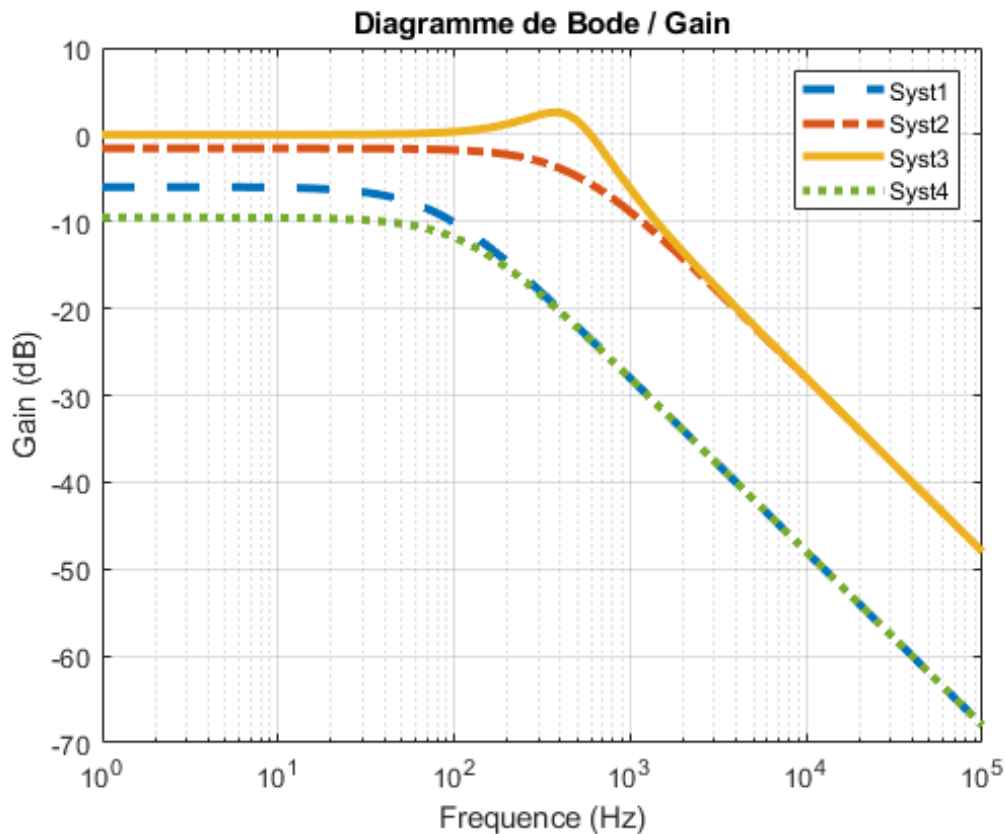
Dans cette partie, on utilisera comme exemple un système du premier ordre de la forme :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \tau \cdot p}$$

On prendra $H_0 = 0.5$ et $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$

Parmi les réponses en fréquence proposées par la suite, laquelle correspond :

1. au système en boucle ouverte
2. au système en boucle fermée, avec un retour unitaire ($B(p) = 1$) et sans correction ($C(p) = 1$)
3. au système en boucle fermée, avec un retour unitaire ($B(p) = 1$) et une correction proportionnelle ($C(p) = G$ avec $G = 10$)
4. au système en boucle fermée, avec un retour unitaire ($B(p) = 1$) et une correction proportionnelle et intégrale ($C(p) = G + 1/(\tau_i \cdot p)$ avec $G = 10$ et $\tau_i = 3 \cdot 10^{-5}$)



On peut calculer la fonction de transfert en boucle fermée, avec et sans correction.

Cas boucle fermé sans correction ($B = 1$) :

$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)} = \frac{H_0}{1 + H_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau \cdot p}{1 + H_0}}$$

Gain statique : $FTBF_0 = H_0/(1 + H_0)$

Constante de temps : $\tau_B F = \tau/(1 + H_0) < \tau$

Cas boucle fermé avec correction proportionnelle ($G = 10$ et $B = 1$) :

$$FTBF(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)} = \frac{G \cdot H_0}{1 + G \cdot H_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau \cdot p}{1 + G \cdot H_0}}$$

Gain statique : $FTBF_0 = G \cdot H_0/(1 + G \cdot H_0) = 0.803 = -1.5$ dB

Constante de temps : $\tau_B F = \tau / (1 + G \cdot H_0) < \tau$

Cas boucle fermé avec correction proportionnelle et intégrale ($G = 10$ et $B = 1$) :

$$FTBF(p) = \frac{C(p) \cdot H(p)}{1 + C(p) \cdot H(p)}$$

$$C(p) \cdot H(p) = \frac{H_0 \cdot G \cdot \tau_i \cdot p + H_0}{\tau_i \cdot p + \tau \cdot \tau_i \cdot p}$$

On obtient en boucle fermée une réponse du second ordre, qui peut être résonant.

$$FTBF(p) = \frac{G \cdot \tau_i \cdot p}{1 + (1/H_0 + K) \cdot \tau_i \cdot p + \tau \cdot \tau_i p^2 / H_0}$$

Identification des réponses en fréquence

Syst 1 : Sys Bouclé : on peut calculer le gain statique qui vaut $0.5/(1+0.5)$ ($G_0 = -9.6$ dB) et premier ordre

Syst 2 : Sys Bouclé + P : erreur statique encore présente mais système plus rapide

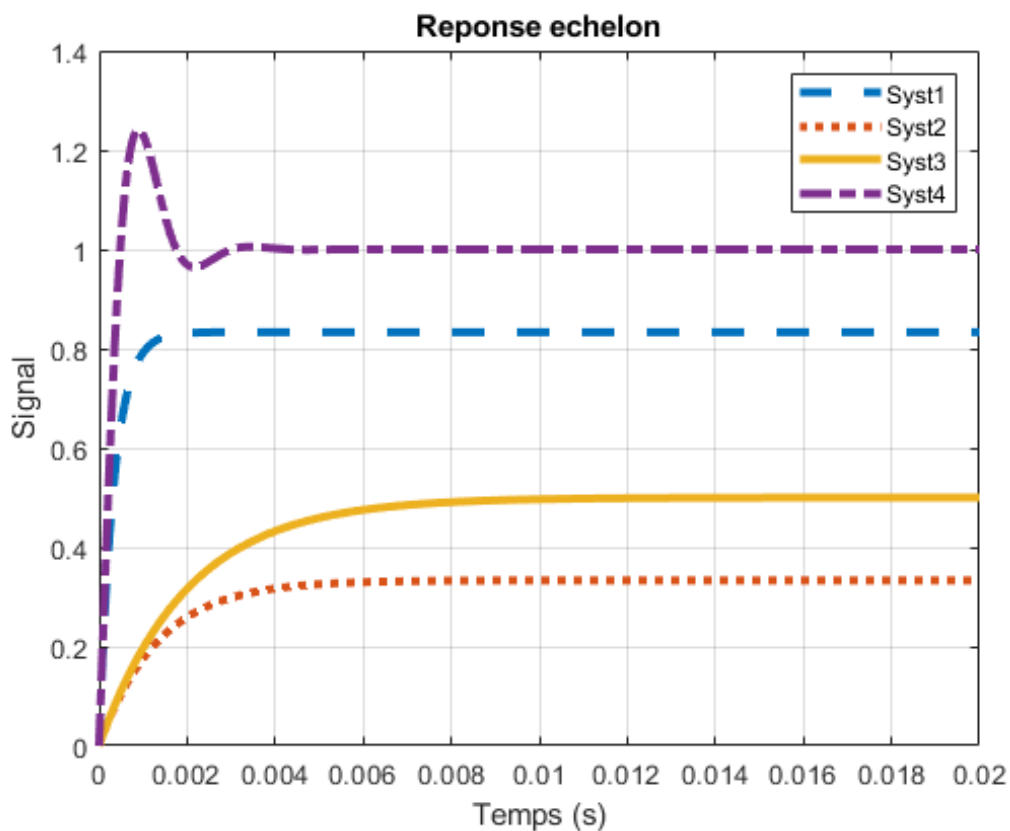
Syst 3 : Sys Bouclé + PI : pas d'erreur statique (gain statique = 0dB) et système avec la plus grande bande-passante, mais pouvant devenir très résonant

Syst 4 : Sys Ouvert : $G_0 = -6$ dB et premier ordre

Il est intéressant de voir ici que le rebouclage et la correction d'un système permet de modifier sa réponse en fréquence et donc sa réponse à un échelon.

Mission 3b - Correction d'un système

Même question avec les réponses indicielles suivantes.



Syst 1 : Sys Bouclé + P : erreur statique encore présente mais système plus rapide, mais pouvant devenir oscillant si G mal choisi

Syst 2 : Sys Bouclé : on peut calculer le gain statique qui vaut $0.5/(1 + 0.5)$

Syst 3 : Sys Ouvert : gain statique = 0.5 et constante de temps

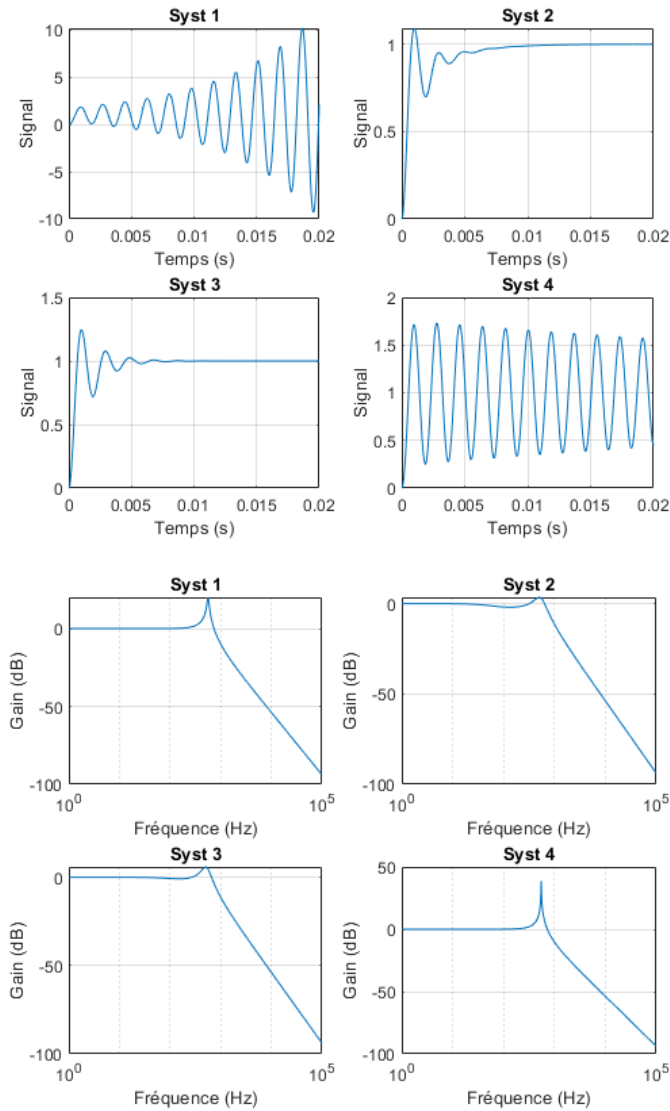
Syst 4 : Sys Bouclé + PI : pas d'erreur statique pour une consigne appliquée à 1 et résonance (ordre 2 à cause du correcteur)

Il est intéressant de voir ici que le rebouclage et la correction d'un système permet de modifier sa réponse en fréquence et donc sa réponse à un échelon.

Mission 4 - Exemple de correction proportionnelle et intégrale

On se base sur le système précédent, $H(p) = \frac{H_0}{1+\tau \cdot p}$, rebouclé de manière unitaire ($B(p) = 1$) et une correction proportionnelle et intégrale ($C(p) = G + 1/(\tau_i \cdot p)$ avec $G = 10$).

Précisez si la correction intégrale est bien choisie dans les 4 cas suivants (réponse indicielle et réponse fréquentielle).



Syst 1 : La réponse indicielle de ce système part à la dérive (ne converge pas). Ce système est instable.

Syst 2 : La réponse indicielle de ce système est amortie, mais le temps de montée semble mal choisi. Le paramètre τ_i est probablement mal choisi.

Syst 3 : La réponse indicielle de ce système est relativement bien amortie et tend vers une valeur finie. Le paramétrage du correcteur semble le meilleur dans ce cas là.

Syst 4 : La réponse indicielle de ce système est peu amorti. Le correcteur semble mal paramétré.

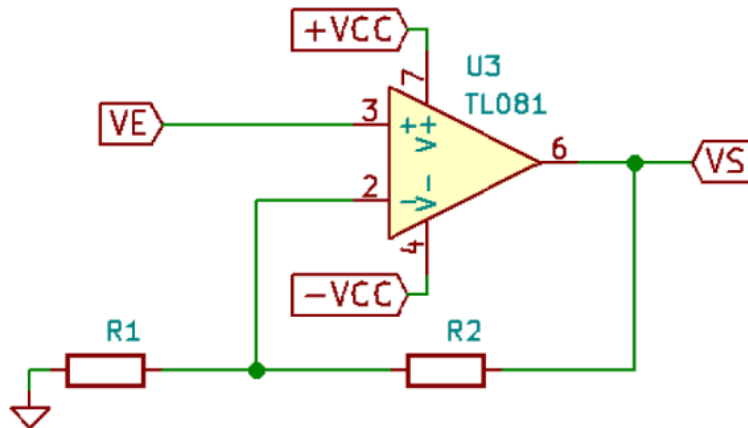
Mission 5 - Exemple : Amplificateur non-inverseur

On rappelle qu'un ALI (Amplificateur Linéaire Intégré) peut être modélisé par une fonction de transfert du premier ordre du type :

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}}$$

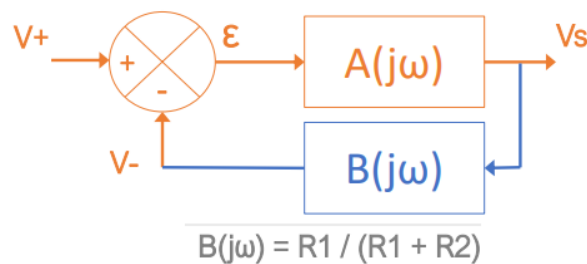
où A_0 est l'amplification différentielle statique et $\omega_0 = \frac{GBP}{A_0}$ la pulsation de coupure, avec GBP la bande-passante unitaire.

On réalise autour de cet ALI un montage non-inverseur, dont le schéma est donné par la suite.



1. Proposez un schéma bloc pour un **montage amplificateur non-inverseur**.
2. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée de ce montage.
3. Que valent à présent le gain statique et la pulsation caractéristique de ce système (pour les mêmes valeurs de A_0 et GBP) ?

Schéma bloc



$B(p) = V - (p)/V_S(p) = R_1/(R_1 + R_2)$ si R_2 est la résistance de contre-réaction et R_1 la résistance à la masse.

Fonction de transfert

On a $G(p) = A(p)/(1 + A(p) \cdot B(p))$ avec $A(p)$ la fonction de transfert de l'ALI et $B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

On obtient alors :

$$G(p) = \frac{\frac{A_0}{1 + \frac{p}{\omega_c}}}{1 + \frac{A_0}{1 + \frac{p}{\omega_c}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Après simplification, on obtient :

$$G(p) = \frac{A_0}{1 + A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_c} \cdot \frac{1}{1 + A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}}$$

Gain statique et bande passante

Le gain statique vaut alors : $G_0 = \frac{A_0 \frac{R_1}{R_1+R_2}}{1+A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}}$

On peut simplifier si A_0 est « grand » par : $G_0 = \frac{R_1+R_2}{R_1}$.

La pulsation de coupure vaut : $\omega_0 = \omega_c \cdot (1 + A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2})$,

donc $f_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot (1 + A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}) = GBP \cdot \frac{(1+A_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2})}{A_0}$.

On peut là aussi simplifier si A_0 est « grand » par $f_0 = GBP \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2}$