

## Annexe 1 :

### Présentation « naïve » des inégalités de Bell

Alain Aspect

#### 1. INTRODUCTION

Le problème de l'interprétation du formalisme quantique, et en particulier de son caractère définitivement probabiliste, a donné lieu à des débats homériques entre Bohr et Einstein de la fin des années 1920 jusqu'à la disparition des protagonistes au début des années 1950. La mécanique quantique était largement acceptée par la plupart des physiciens contemporains, pourtant Einstein et De Broglie, et dans une certaine mesure Schrödinger, restaient profondément troublés par cet aspect probabiliste du formalisme à la différence de Bohr qui en avait fait la clef de voûte de l'interprétation de la nouvelle théorie connue sous le nom « d'interprétation de Copenhague ».

Un moment culminant de ces débats fut la publication en 1935 du célèbre article « EPR » (Einstein, Podolsky, et Rosen) <sup>1</sup> dont le titre pose la question : « La description quantique de la réalité physique peut-elle être considérée comme complète ? ». Dans cet article, Einstein et ses coauteurs montrent que le formalisme quantique prédit l'existence d'états particuliers de deux particules, par exemple deux électrons, caractérisés par de très fortes corrélations à la fois des vitesses et des positions (figure 1).

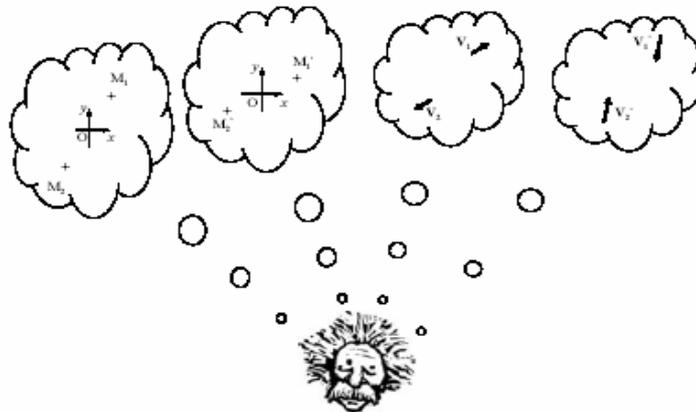


Figure 1. Expérience de pensée (gedankenexperiment) d'Einstein, Podolsky, et Rosen (1935)

Plus précisément, pour un état « EPR », le formalisme quantique prédit que des mesures de position sur chacun des deux électrons donneront des valeurs symétriques par rapport à l'origine, et que des mesures de vitesses donneront de même des résultats toujours opposés. Dans un tel état, il suffit donc de mesurer la vitesse d'un électron pour connaître avec certitude celle de l'autre électron ou de mesurer la position du premier électron pour connaître avec certitude celle du second. Les deux électrons étant éloignés l'un de l'autre, le choix de la grandeur mesurée sur le premier ne peut modifier l'état du second. Einstein, Podolsky et Rosen en déduisent que le second électron possédait, avant la mesure, des valeurs

parfaitement déterminées de vitesse et de position (appelées « paramètres supplémentaires » ou « variables cachées »). Comme le formalisme quantique ne peut pas donner de valeur précise simultanée à la position et à la vitesse (comme le montrent par exemple les relations d'incertitude de Heisenberg), les auteurs concluent que le formalisme quantique est incomplet, c'est-à-dire qu'il ne rend pas compte de la totalité de la réalité physique, et qu'il faut donc s'attacher à essayer de le compléter.

Niels Bohr fut, semble-t-il, bouleversé par cet argument qui s'appuie justement sur le formalisme quantique lui-même pour en montrer le caractère incomplet, provisoire. Ses écrits montrent sa conviction profonde que, si le raisonnement « EPR » était correct, compléter le formalisme quantique ne serait pas suffisant, c'est toute la physique quantique qui s'effondrerait. Bohr contesta donc immédiatement ce raisonnement, en affirmant que dans un état quantique de ce type, « non factorisable », on ne peut parler des propriétés individuelles de chaque électron, et cela même s'ils sont très éloignés l'un de l'autre. Avec Schrödinger, qui découvrit au même moment ces états étonnants, on allait désormais parler d'état « intriqué », pour indiquer que les deux électrons sont indissolublement enchevêtrés : ils forment un objet unique quelle que soit leur distance de séparation.

Cette question focalisa l'essentiel du débat ultérieur entre les deux physiciens. Pourtant, notons d'emblée qu'Einstein ne contestait nullement la justesse des prédictions du formalisme quantique : la controverse portait sur l'interprétation de ce formalisme.

On pourrait penser que ce débat entre deux géants de la physique du XX<sup>ème</sup> siècle eut un immense écho. En fait, lorsque l'article « EPR » parut en 1935, la Mécanique Quantique allait de succès en succès et, mis à part Bohr, la plupart des physiciens ignorèrent ce débat qui leur paraissait académique : il semblait que l'adhésion à l'une ou l'autre des positions fût une affaire de goût personnel (ou de position épistémologique) sans aucune conséquence pratique sur la mise en œuvre du formalisme quantique, ce qu'Einstein lui-même ne semblait pas contester. Il fallut attendre trente ans pour voir paraître un démenti cinglant à cette position relativement consensuelle.

La situation fut radicalement bouleversée en 1965, lorsque John Bell découvrit que si l'on suit jusqu'au bout les idées d'Einstein, on aboutit, dans certaines situations très rares, appelées « états EPR », à une contradiction quantitative avec les prédictions quantiques<sup>2</sup>. Le débat initialement de nature épistémologique devenait une question scientifique, susceptible d'être tranchée expérimentalement. De telles expériences allaient effectivement être menées à partir des années 1970.

La première partie de cette présentation (parties 2 à 6), vise à expliquer ce que sont le théorème de Bell et les inégalités de Bell, et pourquoi je les trouve si importants. Elle est suivie d'une brève présentation des expériences de première génération, conduites entre 1971 et 1976. Puis je décrirai plus en détail les trois expériences de deuxième génération, réalisées à Orsay entre 1976 et 1982, avec des paires de photons corrélées produites dans des cascades radiatives atomiques excitées par laser. Je présenterai enfin les expériences de troisième génération, développées à partir de la fin des années 1980. Utilisant des sources encore plus efficaces, basées sur la division paramétrique de photons laser, elles ont conduit récemment à des tests des inégalités de Bell encore plus proches du schéma idéal. Permettant l'injection des paires de photons EPR corrélés dans des fibres optiques, ces sources ont par ailleurs ouvert la voie au domaine de la cryptographie quantique et de l'information quantique.

## 2. POURQUOI DES PARAMETRES SUPPLEMENTAIRES ? L'EXPERIENCE DE PENSEE D' EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN-BOHM

### 2.1. Schéma expérimental

Considérons la variante de Bohm<sup>3</sup> de l'expérience de pensée EPR (Fig. 2). Une source  $S$  émet une paire de photons  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , s'éloignant dans des directions opposées suivant  $Oz$ . Supposons que la partie polarisation du vecteur d'état décrivant la paire de photon puisse s'écrire :

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x, x\rangle + |y, y\rangle\} \quad (1)$$

où  $|x\rangle$  et  $|y\rangle$  sont des états de polarisation linéaire.

*Cet état est remarquable. En effet, s'il est facile de se représenter l'état  $|x, x\rangle$  comme décrivant deux photons polarisés linéairement suivant  $Ox$ , ou l'état  $|y, y\rangle$  comme décrivant deux photons polarisés suivant  $Oy$ , il s'avère impossible de se représenter l'état (1). La raison est qu'on ne peut le factoriser en un produit tensoriel de deux états de polarisation définie pour chaque photon. On ne peut donc attribuer de polarisation à chacun du photon pris séparément.*

Effectuons une mesure de polarisation linéaire sur chacun de ces photons, avec les analyseurs  $I$  et  $II$  (deux cubes séparateurs de polarisations). L'analyseur  $I$ , dans l'orientation caractérisée par le vecteur unitaire  $\mathbf{a}$ , est suivi de deux détecteurs donnant les résultats  $+$  ou  $-$ , correspondant à une polarisation linéaire parallèle ou perpendiculaire à  $\mathbf{a}$  pour le photon  $\nu_1$ . L'analyseur  $II$ , dans l'orientation  $\mathbf{b}$ , agit de façon analogue sur le photon  $\nu_2$  \*.

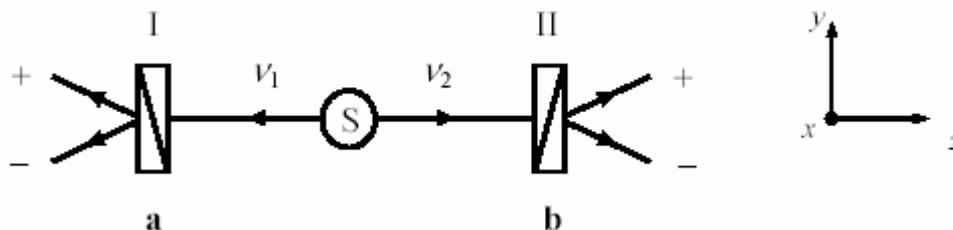


Figure 2. Expérience de pensée d'Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm avec des photons.

Les deux photons émis dans l'état de polarisation de l'équation (1), sont analysés par des polariseurs linéaires  $I$  et  $II$  orientés suivant les directions  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . On peut mesurer les probabilités de détections simples ou conjointes dans les voies de sortie des polariseurs.

\* Cette situation est en correspondance biunivoque avec l'expérience de pensée EPR Bohm portant sur une paire de spins  $1/2$  dans un état singulet, sur lesquels des filtres de Stern-Gerlach orientables effectuent des mesures de composantes de moment cinétique.

Un calcul simple de Mécanique Quantique fournit les résultats prévus pour ces mesures de polarisation, simples ou en coïncidences. Nous noterons  $P_{\pm}(\mathbf{a})$  la probabilité (simple) d'obtenir le résultat  $\pm$  sur le photon  $\nu_1$  ; de même  $P_{\pm}(\mathbf{b})$  caractérise le résultat de la mesure de polarisation sur le photon  $\nu_2$ . La prédiction quantique s'écrit :

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{a}) &= P_-(\mathbf{a}) = 1/2 \\ P_+(\mathbf{b}) &= P_-(\mathbf{b}) = 1/2 \end{aligned} \quad (\text{M.Q.}) \quad (2)$$

Ces résultats sont en accord avec l'observation qu'on ne peut attribuer aucune polarisation particulière à chacun des photons, de telle sorte qu'une mesure individuelle de polarisation donne un résultat aléatoire.

Nous nous intéressons à présent aux probabilités  $P_{\pm\pm}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de détection conjointe de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  dans les canaux  $+$  ou  $-$  des polariseurs  $I$  ou  $II$ , orientés suivant  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . La prédiction quantique s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{M.Q.}) \quad (3)$$

Nous allons maintenant montrer que ces prédictions ont des conséquences de très grande portée.

## 2.2. Corrélations

Considérons d'abord la situation particulière,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ , où les deux polariseurs sont parallèles. La prédiction quantique pour les probabilités conjointes (équations 3) s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

D'après ce résultat, lorsque le photon  $\nu_1$  est trouvé dans le canal  $+$  du polariseur  $I$ , alors on est certain de trouver  $\nu_2$  dans le canal  $+$  de  $II$  (et de même pour les résultats  $-$ ). Ainsi, pour des polariseurs parallèles, les résultats de mesure de polarisation sur  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont *totalement corrélés* et ceci quelque soit la direction  $\mathbf{a}$  des polariseurs.

Pour caractériser quantitativement le degré de corrélation entre quantités aléatoires, on utilise le coefficient de corrélation. Pour les mesures de polarisation considérées ici, il s'écrit :

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (5)$$

En reportant dans cette définition les prédictions quantiques (3), on obtient un coefficient de corrélation de polarisation

$$E_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos [2 (\mathbf{a}, \mathbf{b})] \quad (6)$$

Pour le cas particulier des polariseurs parallèles ( $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ), on trouve  $E_{QM} = 1$ , ce qui confirme que la corrélation est totale.

En conclusion, les prédictions quantiques suggèrent que, malgré le caractère apparemment aléatoire des résultats individuels, il y a une corrélation entre ces résultats aléatoires. Cette corrélation est caractérisée par l'équation (6). Pour des polariseurs parallèles (ou perpendiculaires), la corrélation est totale ( $|E_{QM}| = 1$ ).

### 2.3. Difficultés pour construire une image à partir du formalisme quantique

Nous pouvons chercher à trouver une image simple pour comprendre ces corrélations fortes. L'idée la plus naturelle est de suivre le calcul quantique conduisant à (3). En fait, il existe plusieurs moyens de faire ce calcul. L'un des plus directs consiste à projeter le vecteur d'état (1) sur le vecteur propre associé à chaque mesure conjointe particulière. On obtient ainsi immédiatement les résultats (3). Malheureusement, ces calculs portant sur des vecteurs d'états décrivant globalement les 2 photons dans un espace abstrait, il est difficile d'en extraire une image dans notre espace ordinaire.

Pour décrire séparément les deux mesures aux deux extrémités opposées de l'expérience, nous décomposons la mesure conjointe en deux étapes. Supposons par exemple que la mesure sur le photon  $\nu_1$  soit faite en premier, et donne le résultat  $+$ , le polariseur  $I$  étant orienté suivant  $\mathbf{a}$  que nous prenons parallèle à l'axe  $Ox$  pour simplifier ( $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x$ ). Ce résultat  $+$  a une probabilité de  $1/2$ . Pour continuer le calcul, nous devons utiliser le postulat de réduction du paquet d'onde : à la suite de cette première mesure, le nouveau vecteur d'état  $|\Psi'(\nu_1, \nu_2)\rangle$  décrivant la paire est obtenu par projection du vecteur d'état initial  $|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle$  (équation 1) sur l'espace propre associé au résultat  $+$  : cet espace à deux dimensions a pour base  $\{|x, x\rangle, |x, y\rangle\}$ . En utilisant le projecteur correspondant, on obtient

$$|\Psi'(\nu_1, \nu_2)\rangle = |x, x\rangle \quad (7)$$

Cela veut dire qu'immédiatement après la première mesure, le photon  $\nu_1$  prend la polarisation  $|x\rangle$  : ceci paraît évident puisque la mesure, faite avec un polariseur orienté suivant  $Ox$ , a donné le résultat  $+$ . De façon plus étonnante, le photon éloigné  $\nu_2$ , qui n'a encore interagi avec aucun polariseur, a lui aussi été projeté dans l'état  $|x\rangle$ , de polarisation bien définie, parallèle à celle trouvée pour  $\nu_1$ . Cette conclusion surprenante conduit bien au résultat correct (3), puisqu'une application directe de la loi de Malus montre qu'une mesure ultérieure sur le photon  $\nu_2$  donnera

$$P_{++}(\mathbf{e}_x, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\mathbf{e}_x, \mathbf{b}) \quad (8)$$

(le facteur  $1/2$  correspond à la probabilité  $1/2$  d'avoir obtenu  $+$  lors de la première mesure sur le photon  $\nu_1$ ).

Le calcul en deux étapes donne donc les mêmes résultats que le calcul direct. Mais il suggère en plus une image en deux étapes, que l'on peut maintenant décrire dans l'espace réel :

- i. Le photon  $\nu_1$ , qui n'avait pas de polarisation bien définie avant sa mesure au polariseur  $I$ , prend la polarisation associée au résultat obtenu, au moment de cette mesure : ceci n'est en rien surprenant.
- ii. Lorsque la mesure est effectuée sur  $\nu_1$ , le photon  $\nu_2$ , qui n'avait pas de polarisation définie avant cette mesure, est projeté dans un état de polarisation parallèle au résultat de la mesure effectuée sur  $\nu_1$ . Ceci est très étonnant, puisque ce brusque changement dans la description du photon  $\nu_2$  se produit instantanément, quelle que soit la distance entre les photons  $\nu_1$  et  $\nu_2$  au moment de la mesure sur  $\nu_1$ .

Cette image apparaît en contradiction avec la relativité. Suivant Einstein, ce qui se passe dans une région donnée de l'espace temps ne peut pas être influencé par un événement se produisant dans une autre région de l'espace temps séparée de la première par un intervalle du genre espace (aucun signal se propageant à une vitesse inférieure ou égale à celle de la lumière ne peut connecter les deux événements). Il n'est donc pas surprenant que l'on ait essayé de trouver des images plus acceptables pour décrire les corrélations EPR. Nous allons présenter une telle image.

#### **2.4. Paramètres supplémentaires**

Il est courant dans le monde classique d'observer des corrélations entre mesures distantes, sur deux systèmes séparés qui avaient interagi dans le passé. Par exemple, si un système mécanique de moment cinétique total nul se fragmente en deux sous l'effet d'une répulsion interne, les moments cinétiques des deux fragments resteront exactement opposés à tout instant ultérieur, en l'absence de force externe. Plus généralement, même en présence de forces, les deux moments cinétiques resteront corrélés, puisque leurs valeurs à tout instant sont déterminées par les valeurs initiales qui étaient exactement opposées.

Il est tentant d'utiliser une telle image classique pour rendre compte des corrélations EPR, en terme de propriété commune aux deux systèmes. Considérons à nouveau la corrélation de polarisation totale entre les mesures effectuées avec des polariseurs parallèles,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ . Quand nous trouvons + pour  $\nu_1$ , nous sommes sûrs de trouver aussi + pour  $\nu_2$ . Nous sommes alors conduits à admettre qu'il existe une propriété (Einstein parlait d'« élément de réalité physique ») appartenant à cette paire avant les mesures, et déterminant le résultat ++. Pour une autre paire, conduisant au résultat —, nous pouvons de façon analogue invoquer une propriété commune préalable, déterminant le résultat —. Il suffit alors d'admettre que la moitié des paires sont émises avec la propriété ++, et la moitié avec la propriété —, pour reproduire tous les résultats obtenus dans cette configuration.

Il faut remarquer ici que de telles propriétés, différentes d'une paire à l'autre, ne sont pas prises en compte par le vecteur d'état quantique  $|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle$  qui est le même pour toutes les paires. C'est pour cette raison, qu'*Einstein en tira la conclusion que la Mécanique*

*Quantique n'est pas complète.* Et c'est pourquoi de telles propriétés supplémentaires sont désignées par le terme de « paramètres supplémentaires », ou encore « variables cachées ».

En conclusion, il semble possible de « comprendre » les corrélations EPR par une image de type classique, impliquant des paramètres supplémentaires différents d'une paire à l'autre. On peut espérer retrouver les prédictions statistiques de la mécanique quantique, lorsqu'on moyenne sur les paramètres supplémentaires. Il semble que telle était la position d'Einstein<sup>4,5,6</sup>. Notons qu'à cette étape du raisonnement, une telle position n'est pas en contradiction avec la Mécanique Quantique : il n'y a aucun problème logique à admettre pleinement les prédictions quantiques, tout en invoquant des paramètres supplémentaires donnant une image acceptable des corrélations EPR.

### 3. INEGALITES DE BELL

#### 3.1. Formalisme

Bell traduit en termes mathématiques les conséquences de la discussion ci-dessus, et il introduisit explicitement des paramètres supplémentaires, notés  $\lambda$ . La distribution de ces paramètres sur un ensemble de paires émises est spécifiée par une densité de probabilité  $\rho(\lambda)$ , telle que

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &\geq 0 \\ \int d\lambda \rho(\lambda) &= 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Pour une paire donnée, caractérisée par un paramètre supplémentaire,  $\lambda$ , les résultats de mesures sont donnés par des fonctions qui peuvent prendre 2 valeurs :

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \pm 1 \quad \text{au polariseur I (orientation } \mathbf{a} \text{)} \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \pm 1 \quad \text{au polariseur II (orientation } \mathbf{b} \text{)} \end{aligned} \tag{10}$$

Une théorie à Paramètre Supplémentaire particulière est complètement définie par la forme explicite des fonctions  $\rho(\lambda)$ ,  $A(\lambda, \mathbf{a})$  et  $B(\lambda, \mathbf{b})$ . Il est alors facile d'exprimer les probabilités des divers résultats de mesures. Par exemple, nous remarquons que la fonction  $\frac{1}{2}[A(\lambda, \mathbf{a})+1]$  prend la valeur +1 pour le résultat +, et 0 pour le résultat - (et de façon similaire  $\frac{1}{2}[1-B(\lambda, \mathbf{b})]$  prend la valeur + pour le résultat - et 0 pour le résultat +), nous pouvons en déduire

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{a}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, \mathbf{a})+1]}{2} \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{[A(\lambda, \mathbf{a})+1]}{2} \frac{[1-B(\lambda, \mathbf{b})]}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

Finalement, la fonction de corrélation définie à l'équation (5) prend dans un tel formalisme la forme particulièrement simple

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \quad (12)$$

### 3.2. Un exemple « naïf » de Théorie à Paramètres Supplémentaires

Comme exemple de Théorie à Paramètres Supplémentaires, nous présentons un modèle où chaque photon qui se propage le long de l'axe Oz est supposé posséder une polarisation linéaire bien définie, déterminée par son angle ( $\lambda_1$  or  $\lambda_2$ ) avec l'axe  $x$ . Afin de rendre compte de la forte corrélation, nous supposons que les deux photons d'une même paire sont émis par la même polarisation linéaire, définie par un angle commun  $\lambda$  (figure 3).

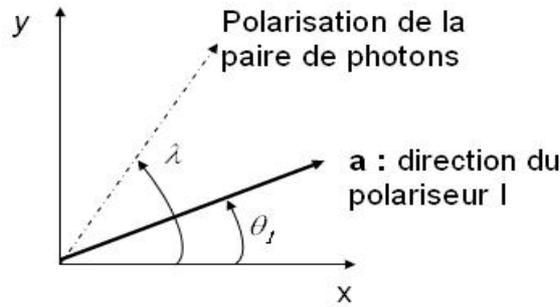


Figure 3 – Exemple de théorie à paramètres supplémentaires. Chaque paire de photons a une « direction de polarisation » définie par  $\lambda$  qui est le paramètre supplémentaire du modèle.

La polarisation des diverses paires est distribuée aléatoirement, ce que nous décrivons par une densité de probabilité isotrope  $\rho(\lambda)$  :

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \quad (13)$$

Pour compléter notre modèle, nous devons donner une forme explicite pour les fonctions  $A(\lambda, \mathbf{a})$  et  $B(\lambda, \mathbf{b})$ . Nous prenons la forme suivante

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \text{signe}\{\cos 2(\theta_I - \lambda)\} \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \text{signe}\{\cos 2(\theta_{II} - \lambda)\} \end{aligned} \quad (14)$$

où les angles  $\theta_I$  et  $\theta_{II}$  indiquent les orientations des polariseurs. Remarquons que ces formes sont tout à fait raisonnables. La fonction  $A(\lambda, \mathbf{a})$  prend la valeur +1 quand la polarisation du photon  $v_1$  fait un angle plus petit que  $\frac{\pi}{4}$  avec la direction d'analyse  $\mathbf{a}$ , et la valeur -1 pour le cas complémentaire (la polarisation est alors plus proche de la perpendiculaire à  $\mathbf{a}$ ).

Avec ce modèle explicite, nous pouvons utiliser les équations (11) pour calculer les probabilités de diverses mesures. Nous trouvons par exemple des probabilités simples (15) identiques aux résultats quantiques :

$$P_+(\mathbf{a}) = P_-(\mathbf{a}) = P_+(\mathbf{b}) = P_-(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \quad (15)$$

Le modèle nous permet également de calculer la fonction de corrélation de polarisation, et nous trouvons à partir de l'équation (12) :

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 - 4 \frac{|\theta_I - \theta_{II}|}{\pi} = 1 - 4 \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}{\pi} \quad (16)$$

pour  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_I - \theta_{II} \leq \frac{\pi}{2}$

Ce résultat est remarquable. Notons d'abord que  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  dépend seulement de l'angle relatif  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , entre les polariseurs, comme la prédiction de la mécanique quantique (6). De plus comme on le voit sur la figure 4, il y a une différence modérée entre les prédictions du modèle simple à paramètre supplémentaire et les prédictions quantiques. Les prédictions sont en accord parfait pour les angles 0 et  $\pi/2$ , c'est-à-dire dans les cas de corrélation totale. Ce résultat, obtenu avec un modèle à paramètre supplémentaire extrêmement simple, est très encourageant et l'on pourrait espérer qu'un modèle plus sophistiqué serait capable de réduire l'écart avec les prédictions de la mécanique quantique. *La découverte de Bell est que la recherche d'un tel modèle est sans espoir*, comme nous allons le montrer maintenant.

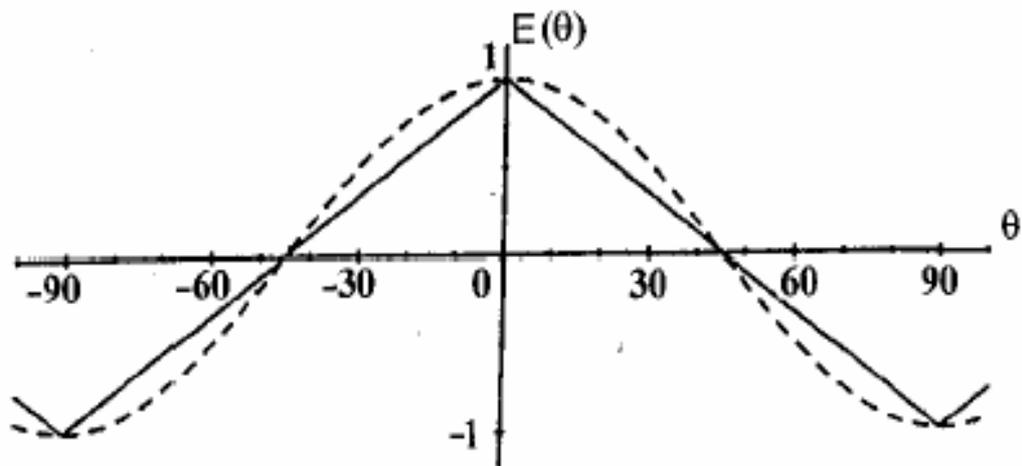


Figure 4 – Coefficient de corrélation de polarisation, en fonction de l'orientation relative des polariseurs : (i) ligne pointillée : prédiction de la mécanique quantique ; (ii) ligne continue : notre modèle simple.

### 3.3. Inégalités de Bell

Il y a de nombreuses formes différentes, et des démonstrations variées, des inégalités de Bell. Nous donnons ici une démonstration très simple conduisant à une forme directement utilisable pour les expériences<sup>†</sup>.

Considérons la quantité

$$\begin{aligned} s &= A(\lambda, \mathbf{a}).B(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a}).B(\lambda, \mathbf{b}') + A(\lambda, \mathbf{a}').B(\lambda, \mathbf{b}) + A(\lambda, \mathbf{a}').B(\lambda, \mathbf{b}') \\ &= A(\lambda, \mathbf{a})[B(\lambda, \mathbf{b}) - B(\lambda, \mathbf{b}')] + A(\lambda, \mathbf{a}')[B(\lambda, \mathbf{b}) + B(\lambda, \mathbf{b}')] \end{aligned} \quad (17)$$

En se souvenant que les fonctions  $A$  et  $B$  ne peuvent prendre que les valeurs  $\pm 1$ , on voit immédiatement sur la seconde ligne de l'équation (17)

$$s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = \pm 2 \quad (18)$$

La moyenne sur  $\lambda$  des quantités,  $s$ , est donc comprise entre  $+ 2$  et  $- 2$

$$-2 \leq \int d\lambda \rho(\lambda).s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2 \quad (19)$$

En utilisant l'équation (12), nous réécrivons ces inégalités :

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2 \quad (20)$$

avec

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \quad (21)$$

Nous avons obtenu ainsi les inégalités B.C.H.S.H., qui sont les inégalités de Bell généralisées par Clauser, Horne, Shimony, Holt<sup>7</sup>. Elles portent sur une combinaison  $S$  des quatre coefficients de corrélation associés à deux directions d'analyse pour chaque polariseur ( $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{a}'$  pour le polariseur  $I$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{b}'$  pour le polariseur  $II$ ).

## 4. CONFLIT AVEC LA MECANIQUE QUANTIQUE

### 4.1. Mise en évidence

Nous pouvons utiliser les prédictions (6) de la mécanique quantique pour les paires EPR, pour évaluer la quantité  $S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')$  définie par l'équation (21). Pour les orientations particulières indiquées sur la figure 5, le résultat est

---

<sup>†</sup> Il est important de faire la distinction entre les inégalités qui montrent une contradiction mathématique avec la mécanique quantique, mais sans possibilité d'un test expérimental avec des appareils (nécessairement) imparfaits, et des inégalités qui permettent un test expérimental dès lors que les imperfections expérimentales n'excèdent pas certaines limites.

$$S_{QM} = 2\sqrt{2} \quad (22)$$

Cette prédiction de la mécanique quantique est clairement en conflit avec les inégalités de Bell (20) qui sont valables pour n'importe quelle Théorie à Paramètre Supplémentaire de la forme générale définie au §3.1.

Nous avons donc trouvé une situation où les prédictions de la mécanique quantique ne peuvent pas être reproduites (simulées) par des Théories à Paramètres Supplémentaires. Ceci constitue l'essence du théorème de Bell : il est impossible de trouver une Théorie à Paramètres Supplémentaires, de la forme générale définie au § 3.1 qui reproduise **toutes** les prédictions de la mécanique quantique. Cette affirmation est la généralisation de ce que l'on voit sur la Figure 4 dans le cas particulier du modèle à paramètre supplémentaire présenté au § 3.2 : le modèle reproduit exactement les prédictions de la mécanique quantique pour certains angles ( $0, \pi/4, \pi/2$ ), mais il en diffère à d'autres angles. *L'importance du théorème de Bell est qu'il n'est pas restreint à un modèle particulier mais qu'il est général.*

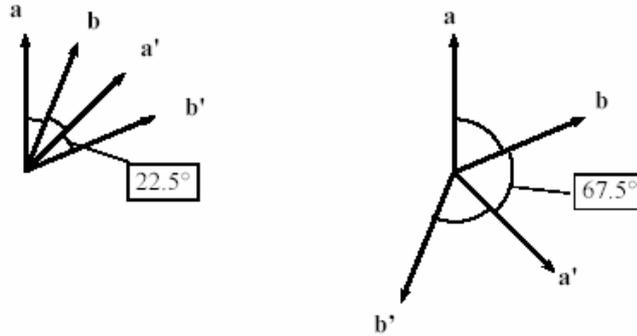


Figure 5 - Orientations donnant le conflit maximum entre les inégalités de Bell et la mécanique quantique.

#### 4.2. Conflit maximum

Il est intéressant de chercher la violation maximale des inégalités de Bell par les prédictions quantiques. Considérons la valeur de  $S$  prévue par la mécanique quantique :

$$S_{QM}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}') = \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + \cos(2\mathbf{a}', \mathbf{b}) + \cos 2(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \quad (23)$$

Cette quantité est fonction des 3 variables indépendantes  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $(\mathbf{b}, \mathbf{a}')$ , et  $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ . Notons que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}') + (\mathbf{a}', \mathbf{b}')$$

Afin de trouver les valeurs extrémales de  $S_{MQ}$ , nous écrivons que les trois dérivées partielles sont nulles. On en déduit

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}') = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \theta \quad (24)$$

et

$$\sin 2\theta = \sin 6\theta \quad (25)$$

Nous avons tracé sur la Figure 6 la fonction  $S_{QM}(\theta)$  évaluée avec des angles soumis à la contrainte (24). Ce graphe montre que les maximum et minimum absolus de  $S_{QM}$  sont

$$S_{MQ} = 2\sqrt{2} \quad \text{pour} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{8} \quad (26)$$

$$S_{MQ} = -2\sqrt{2} \quad \text{pour} \quad \theta = \pm \frac{3\pi}{8} \quad (27)$$

Ces valeurs sont bien solutions de (25). Les ensembles d'orientation correspondants sont indiqués sur la figure 4. Ils donnent les violations maximales des inégalités de Bell.

Plus généralement, la Figure 6 montre qu'il y a un grand intervalle d'orientation conduisant à un conflit entre les prédictions quantiques et les inégalités de Bell. Cependant il est également clair que toutes les orientations ne donnent pas un tel conflit.

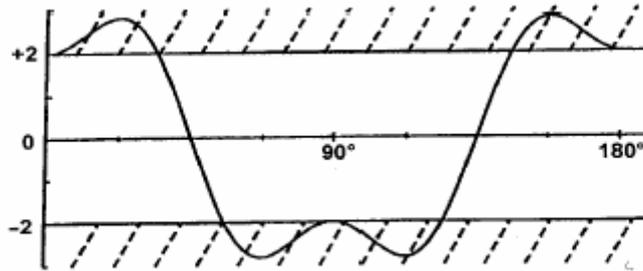


Figure 6 – Quantité  $S(\theta)$  prédite par la mécanique quantique pour des paires EPR. Le conflit avec les inégalités de Bell se produit quand  $|S|$  est plus grand que 2, et il est maximal pour les orientations indiquées sur la Figure 5.

*Alain Aspect discute dans la suite de cet article l'hypothèse de localité implicite dans le raisonnement de J.Bell, puis décrit les différentes expériences menées qui ont toutes montrer la violation des inégalités de Bell.*

*Voici sa conclusion :*

## 11. conclusion

Nous avons donc aujourd'hui une quantité impressionnante de résultats obtenus dans des schémas expérimentaux sensibles qui donnent tous des violations non ambiguës des

inégalités de Bell. De plus, ces résultats sont en excellent accord avec les prédictions quantiques qui prennent en compte toutes les caractéristiques connues des expériences réelles. Bien que toutes les échappatoires n'aient pas encore été fermées, et donc que des expériences améliorées restent encore souhaitables, il est légitime de discuter les conséquences de la réjection des théories à paramètres supplémentaires obéissant à la causalité d'Einstein<sup>40</sup>.

Il semble possible de conclure que l'on puisse observer dans la nature *la non localité quantique*, au sens expliqué aux paragraphes 5 et 6, et ceci sur des distances très grandes, à l'échelle du kilomètre. Notons cependant que cette non localité quantique est de nature très subtile, et par exemple qu'on ne peut pas l'utiliser pour une « télégraphie plus rapide que la lumière ». On peut en effet montrer<sup>41</sup> que dans un schéma où l'on voudrait utiliser les corrélations EPR pour envoyer un message, il serait nécessaire d'envoyer aussi une information classique complémentaire transitant par un canal classique. Aucun message utilisable n'est donc disponible avant le délai relativiste prescrit par la causalité d'Einstein. Ceci rappelle les schémas de téléportation quantique<sup>42</sup>, qui permettent de transporter un état quantique de façon non locale, mais en utilisant aussi une information classique passant par un canal classique. Il y a en fait beaucoup à apprendre, et à comprendre, sur la non localité quantique, par une analyse approfondie des schémas de téléportation quantique<sup>43</sup>.

Chaque fois que l'on se replonge dans le problème que nous venons de présenter, on ne peut s'empêcher de se poser la question : *y a-t-il un problème réel ?* Il faut reconnaître que la réponse à cette question peut varier, même pour les plus grands physiciens. En 1963, R. Feynman donnait une première réponse à cette question dans son fameux cours de physique<sup>44</sup> : « *Ce point ne fut jamais accepté par Einstein... il devint connu sous le nom de paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen. Mais lorsque la situation est décrite comme nous l'avons fait ici, il ne semble pas y avoir quelque paradoxe que ce soit ...* »<sup>†</sup>. Deux décennies plus tard, Feynman exprimait une opinion radicalement différente<sup>45</sup>, toujours sur la situation EPR : « *nous avons toujours eu une très grande difficulté à comprendre la vision du monde que la Mécanique Quantique implique ... Il ne m'est pas encore apparu évident qu'il n'y ait pas de problème réel... Je me suis toujours illusionné moi même, en confinant les difficultés de la Mécanique Quantique dans un recoin de plus en plus petit, et je me retrouve de plus en plus chagriné par ce point particulier. Il semble ridicule de pouvoir réduire ce point à une question numérique, le fait qu'une chose est plus grande qu'une autre chose. Mais voilà : – elle est plus grande ...* »<sup>§</sup> **Que rajouter ?**

---

<sup>†</sup> « *This point was never accepted by Einstein... it became known as the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. But when the situation is described as we have done it here, there doesn't seem to be any paradox at all...* »<sup>44</sup>

<sup>§</sup> « *We always have had a great deal of difficulty in understanding the world view that quantum mechanics represents... It has not yet become obvious to me that there is no real problem... I have entertained myself always by squeezing the difficulty of quantum mechanics into a smaller and smaller place, so as to get more and more worried about this particular item. It seems almost ridiculous that you can squeeze it to a numerical question that one thing is bigger than another. But there you are – it is bigger...* »<sup>45</sup>.

## REFERENCES

---

- <sup>1</sup> A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete ?* Phys. Review **47**, 777 (1935).  
See also Bohr's answer : N. Bohr, *Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Review **48**, 696 (1935).
- <sup>2</sup> J. S. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, Physics **1**, 195 (1964).
- <sup>3</sup> D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs (1951). Republished by Dover (1989).
- <sup>4</sup> D. Bohm and Y. Aharonov, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky*, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957).
- <sup>5</sup> *A. Einstein philosopher scientist*, P.A. Schilp ed. (Open court and Cambridge university press, 1949)
- <sup>6</sup> *Correspondance* entre A. Einstein and M. Born (traduction française : Seuil, Paris, 1972).
- <sup>7</sup> J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
- <sup>40</sup> J.S. Bell, *Atomic cascade Photons and Quantum-Mechanical Nonlocality*, Comments on Atom. Mol.Phys. **9**, 121 (1981).
- <sup>41</sup> A. Aspect, *Expériences basées sur les inégalités de Bell*, J. Physique Colloque **C2**, 940 (1981).
- <sup>42</sup> C. H. Bennet, G. Brassard, C. Crépeau, R. Josza, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).  
D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, *Experimental quantum teleportation*, Nature **390**, 575 (1997).  
D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, and S. Popescu, *Experimental Realization of Teleporting an unknown pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, submitted to Phys. Rev. Lett. (1997).
- <sup>43</sup> S. Popescu, *Bell's inequalities versus teleportation : what is non locality ?* Phys. Rev. Lett. **72**, 797 (1994).
- <sup>44</sup> *The Feynman Lectures on Physics*, vol. III, chapter 18.
- <sup>45</sup> R. P. Feynman, *Simulating Physics with Computers*, Intern. Journ. of Theoret. Phys. **21**, 467 (1982).