

Annexe : Qu'appelle-t-on bruit de photons ?

Dans la littérature scientifique, le bruit de photons peut désigner différents effets du même phénomène. L'objet de cette annexe est de parcourir ces différentes définitions. C'est l'occasion de rappeler quelques notions vues en Mathématiques et Signal au cours de la première année, telles que la loi de Poisson par exemple.

On débute ce tour d'horizon par le domaine du Physicien, c'est à dire l'émission de photon par une source.

1 Sources de photons

Si la puissance moyenne d'une source est notée Φ (en W), le flux photonique moyen, n_{ph} (en s^{-1}) s'exprime selon :

$$n_{\text{ph}} = \frac{\Phi}{\frac{hc}{\lambda}}$$

où $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s, désigne la constante de Planck et où λ est la longueur d'onde de la source. Par exemple, une LED de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm et une puissance de 2 mW émet en moyenne $6 \cdot 10^{15}$ photons par seconde. On définit aussi le délai moyen entre photons qui par exemple pour cette source est de 0.16 fs.

1.1 Modèle du physicien, fluctuation du flux de photons

Pour une source classique, comme une lampe à filament par exemple, les photons sont émis de manière aléatoire, ce caractère aléatoire est illustré sur la figure 1.

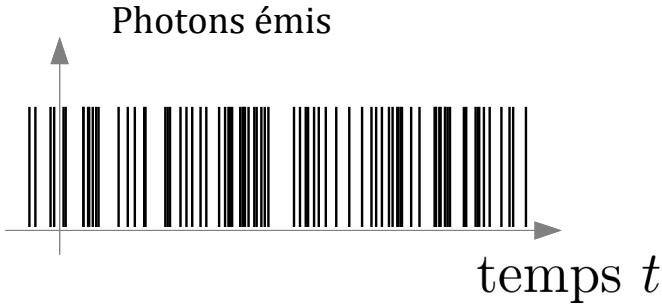


FIGURE 1 – Une représentation de l'émission aléatoire de photons au cours du temps, chaque trait représente l'émission d'un photon

Un modèle mathématique de l'émission de photons est construit à partir des hypothèses sur les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} [1 \text{ photon émis pendant } d\delta] &= n_{\text{ph}} d\delta \\ \mathbf{P} [0 \text{ photon émis pendant } d\delta] &= 1 - n_{\text{ph}} d\delta \\ (\mathbf{P} [n \text{ photons émis pendant } d\delta, n > 1] &= 0) \end{aligned}$$

où $d\delta$, une durée de temps infinitésimale. Ce modèle décrit un phénomène sans mémoire, c'est-à-dire que ces probabilités sont valables à tout instant, l'émission d'un photon ne dépend pas du fait qu'un photon ait été émis au cours de l'intervalle précédent.

1.2 Fluctuations du nombre de photons sur un intervalle de temps fini T

C'est une première définition du bruit de photons que l'on peut rencontrer, elle désigne alors les fluctuations du nombre de photons émis durant un temps T , une illustration de ces fluctuations est donnée figure 2.

Le nombre de photons émis durant l'intervalle $[t - T, T]$, noté $N_{\text{ph}_T}(t)$ est une variable aléatoire de même loi quelque soit l'instant t que l'on considère, on allège donc la référence à l'instant t dans la notation $N_{\text{ph}_T}(t) \rightarrow N_{\text{ph}_T}$. Cette variable aléatoire est caractérisée par sa loi de probabilité :

$$p_{N_{\text{ph}_T}}(N) = \mathbf{P} [N \text{ photons émis pendant } T]$$

Pour déterminer l'expression de cette loi, on découpe l'intervalle de temps

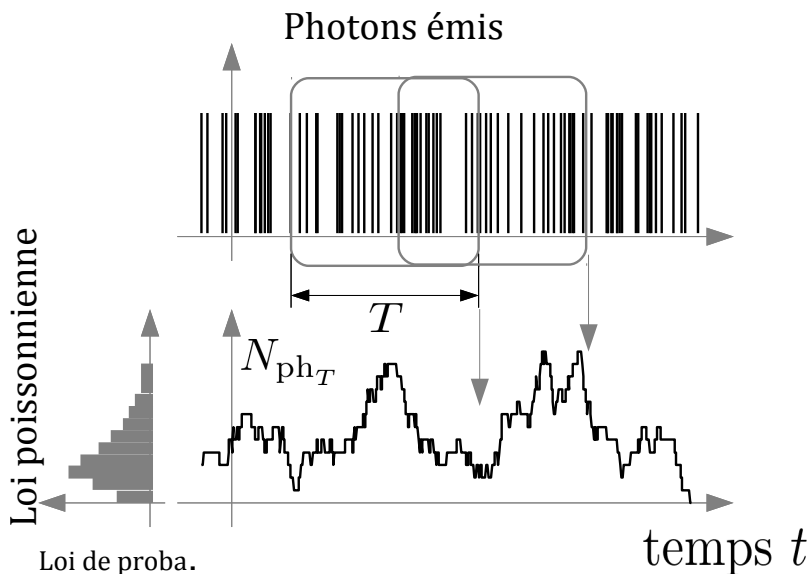


FIGURE 2 – Fluctuation du nombre de photons émis pendant une durée T

T en M intervalles identiques et on fait tendre M vers ∞ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} [N \text{ photons émis pendant } T] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} C_M^N \left(\mathbf{P} \left[1 \text{ photon émis pendant } \frac{T}{M} \right] \right)^N \\ & \quad \left(\mathbf{P} \left[0 \text{ photon émis pendant } \frac{T}{M} \right] \right)^{M-N} \end{aligned}$$

En faisant tendre le nombre d'intervalles vers l'infini, cette expression (qui est celle d'une loi binomiale) tend vers la loi de Poisson de paramètre $(n_{\text{ph}}T)$:

$$\mathbf{P} [N \text{ photons émis pendant } T] = \frac{1}{N!} (n_{\text{ph}}T)^N \exp(-n_{\text{ph}}T)$$

Remarque 1 Ce modèle d'émission de photons est utilisé pour différentes sources de particules, il convient pour modéliser l'arrivée des gouttes de pluie par exemple. Il a été présenté par Siméon Denis Poisson (1781-1840) dans un ouvrage qui traitait des... probabilités des jugements dans les procès criminels¹.

1. Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, Bachelier, Paris 1837, version numérique libre de droits disponible sur internet

Remarque 2 Mêmes si toutes les sources de lumières ne sont pas Poissonniennes, le flux reçu par un détecteur lui l'est très souvent, vous trouverez dans le cours de Maths et Signal 1A des éléments sur cet aspect. Et on traitera justement dans le "TP Bruit" d'un cas où le bruit de photons n'est pas Poissonnien.

1.3 À retenir sur la loi de Poisson

La loi de Poisson possède la propriété importante suivante : la variance est égale à la valeur moyenne (espérance mathématique), donc l'amplitude des fluctuations du nombre de photons (écart-type) est égal à la racine carrée du nombre moyen de photons émis.

$$\mathbb{E}[N_{\text{ph}_T}] = \text{var}[N_{\text{ph}_T}] = n_{\text{ph}} \cdot T \qquad \sigma_{N_{\text{ph}_T}} = \sqrt{n_{\text{ph}} \cdot T}$$

Pour des flux élevés, la loi de Poisson devient symétrique (voir sur la figure 3). Elle peut être approchée par une loi Gaussienne.

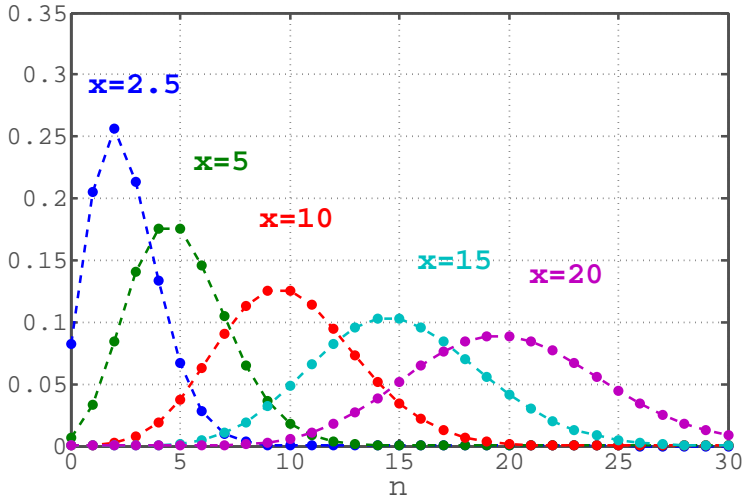


FIGURE 3 – Loi de Poisson. Probabilité $p_N(n)$ versus n pour différents $x = n_{\text{ph}} T$.

2 Détection par un détecteur quantique (photodiode ou photocathode du PM)

On s'intéresse maintenant aux électrons produits par un photodétecteur quantique de rendement η , c'est à dire que chaque photon reçu a une probabilité η d'être détecté, et donc une probabilité $1 - \eta$ de ne pas l'être, et ce indépendamment de l'émission et de la détection de tous les autres photons.

2.1 Fluctuations du nombre d'électrons sur un intervalle de temps

Le nombre d'électrons produit pendant une durée T , N_{eT} est une variable aléatoire décrite par sa loi de probabilité :

$$p_{N_{eT}}(k) = \mathbf{P} [k \text{ photons détectés pendant } T]$$

Or cette probabilité de détection est liée au nombre de photons arrivés par une loi de Bernouilli :

$$\mathbf{P} [k \text{ photons détectés si } n \text{ arrivés}] = C_n^k \eta^k (1 - \eta)^{n-k}$$

et, par la loi de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} [k \text{ photons détectés}] &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P} [n \text{ photons arrivés}] \\ &\cdot \mathbf{P} [k \text{ photons détectés si } n \text{ arrivés}] \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} [k \text{ photons détectés}] &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n_{\text{ph}}T)^n}{n!} e^{-n_{\text{ph}}T} \cdot C_n^k \eta^k (1 - \eta)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-n_{\text{ph}}T} (n_{\text{ph}}T\eta)^k}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n_{\text{ph}}T(1 - \eta))^j}{j!}}_{e^{n_{\text{ph}}T(1-\eta)}} \\ &= \frac{e^{-n_{\text{ph}}T\eta} (n_{\text{ph}}T\eta)^k}{k!} \end{aligned}$$

soit une loi Poissonnienne de paramètre $\eta \cdot n_{\text{ph}}T$, comme si, avec un détecteur idéal, l'intervalle de temps avait été réduit d'un facteur η ou le

flux moyens de photons n_{ph} réduit à $\eta \cdot n_{\text{ph}}$. Le nombre moyen de photo-électrons produits pendant T :

$$\mathbf{E} [N_{e_T}] = \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot T \quad (= \mathbf{Var} [N_{e_T}])$$

Par exemple, une photodiode de rendement quantique $\eta = 80\%$ recevant un flux énergétique de 2 mW à longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ (le flux photonique moyen reçu est de $6 \cdot 10^{15}$ photons par seconde) produit $4,8 \cdot 10^{15}$ électrons par seconde.

Un photomultiplicateur ne fonctionne pas avec des flux si élevés. Pour un flux reçu de 2 nW à longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ (le flux photonique moyen reçu est de $6 \cdot 10^9$ photons par seconde), un rendement quantique de la photocathode de 0.8% conduit à un flux d'électrons primaires de $4,8 \cdot 10^7$ électrons par seconde soit 48 électrons par μs .

2.2 Fluctuations du courant de photodétection

La charge déplacée au cours de la durée T est :

$$Q_T(t) = N_{e_T}(t) \cdot e$$

où $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ est la valeur absolue de la charge de l'électron.

Le courant de photodétection $i_{\text{ph}}(t)$ est lié à cette charge électrique par :

$$Q_T(t) = \int_{t-T}^t i_{\text{ph}}(u) du$$

Disposant du nombre moyen d'électrons par seconde, on peut obtenir le courant moyen de photodétection :

$$I_{ph} = \mathbf{E} [i_{ph}] = \mathbf{E} \left[\frac{N_{e_T}(t) \cdot e}{T} \right] = \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot e$$

Ce courant fluctue cours du temps, et ses fluctuations sont souvent elles-aussi appelées bruit de photons... bien que ce soit un bruit électronique!

D'après le modèle construit jusqu'à présent, la charge $Q_T(t)$ présente donc des discontinuités au cours du temps, on en déduit que le courant de photodétection, lié aux variations de charge, est constitué d'une suite de pics de Dirac.

Ce n'est évidemment pas exactement ce que l'on observe en pratique, ce modèle conduisant à un signal électrique de puissance infinie.... Mais nous verrons dans le paragraphe suivant comment améliorer ce modèle.

Afin de calculer toutefois les caractéristiques de i_{ph} , la méthode est de considérer une moyenne temporelle i_T de i_{ph} est de faire tendre l'horizon de moyennage vers 0.

$$i_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t i_{ph}(u) du$$

On exprime la fonction d'autocovariance de ce courant :

$$\gamma_{i_T}(t') = \mathbf{E} [\delta i_T(t) \cdot \delta i_T(t - t')]$$

$\delta i_T(t)$ désigne les fluctuations du courant :

$$\delta i_T(t) = i_T(t) - \mathbf{E} [i_T(t)]$$

On peut calculer cette fonction en exprimant ce courant "moyen" à partir du nombre de photons détectés sur l'intervalle de moyennage :

$$\begin{aligned} i_T(t) &= \frac{1}{T} Q_T(t) \\ &= \frac{1}{T} N_{e_T}(t) \cdot e \end{aligned}$$

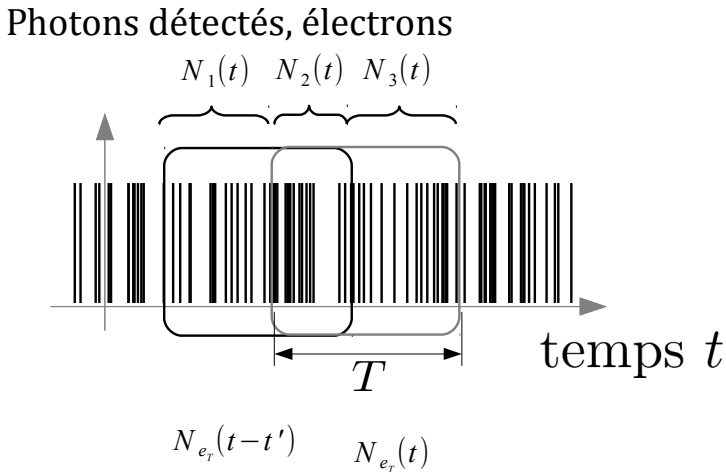


FIGURE 4 – Pour un décalage $t' < T$, $N_{e_T}(t)$ et $N_{e_T}(t - t')$ correspondent en partie à des électrons identiques, leur nombre est noté $N_2(t)$

On distingue alors 2 cas :

1. Si $|t'| > T$ les courants $i_T(t)$ et $i_T(t - t')$ sont décorrélés :

$$\gamma_{i_T}(t') = 0$$

2. Par contre si $|t'| < T$ les courants $i_T(t)$ et $i_T(t - t')$ sont créés en partie à partir des mêmes électrons, comme sur la figure 4. On peut montrer que la covariance de N_{e_T} se réduit à la variance des "électrons communs" :

$$\gamma_{N_{e_T}}(t') = \mathbf{Var}[N_2]$$

Or la variable N_2 est une variable Poissonnienne de paramètre $n_{\text{ph}}(T - |t'|)$, la covariance de N_{e_T} est donc, pour $|t'| < T$ une fonction triangle :

$$\gamma_{i_T}(t') = \frac{e^2}{T^2} \cdot \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot (T - |t'|)$$

Si T tend vers 0 la fonction d'autocovariance tend vers un pic de Dirac de poids $e^2 \cdot \eta \cdot n_{\text{ph}}$:

$$\gamma_{i_T}(t') \rightarrow e^2 \cdot \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot \delta(t') = e \cdot I \cdot \delta(t')$$

où $I = \mathbf{E}[i_{\text{ph}}]$ est le courant détecté moyen. On montre ainsi que le bruit i_{ph} est un **bruit blanc**.

Sa densité spectrale de puissance ($\text{DSP}_{i_{\text{ph}}}$ en A^2/Hz) est constante en fonction de la fréquence f :

$$\text{DSP}_{i_{\text{ph}}}(f) = e \cdot I$$

En effet, la densité spectrale peut être obtenue par transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance :

$$\text{DSP}_{i_{\text{ph}}}(f) = \tilde{\gamma}(f)$$

La variance du courant i_{ph} n'est pas définie, on rappelle que

$$\mathbf{Var}[i_T] = \gamma_{i_T}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{DSP}_{i_T}(f) df$$

Donc cette grandeur n'est pas définie quand T tend vers 0.

La variance et l'écart-type des fluctuations du courant ne peuvent donc être définis que sur une bande passante Δf finie, ils s'expriment par la **formule de Schottky** :

$$\mathbf{Var}[i_{\text{ph}}] = 2 \cdot e \cdot I \cdot \Delta f \quad \text{ou} \quad \sigma_{i_{\text{ph}}} = \sqrt{2 \cdot e \cdot I \cdot \Delta f} \quad (1)$$

Remarque 1 Le facteur 2 de la formule de Schottky provient du fait que la variance du bruit est obtenue en intégrant la densité spectrale de puissance entre $-\infty$ et $+\infty$ et que la largeur spectrale Δf est définie sur les fréquences positives, ce fait est illustré sur la figure 5.

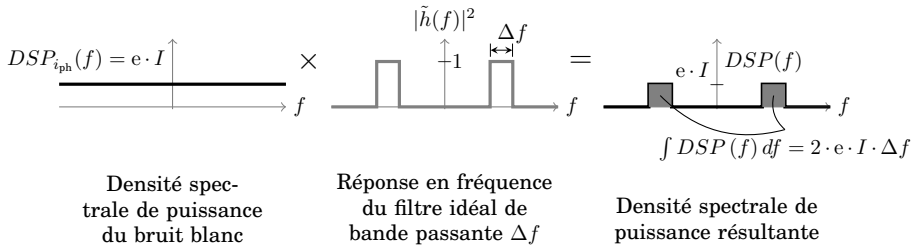


FIGURE 5 – Illustration du fait qu’une bande passante Δf correspond à une intégration de la DSP sur un support égal à $2\Delta f$

Remarque 2 On préfère souvent définir des DSP "monolatérales", c’est à dire ne comportant que des fréquences positives au prix d’un facteur 2. C’est le cas des appareils de mesure en TP : analyseurs de spectre numérique et analogique. Les formules de calcul de bruit restent identiques, comme illustré sur la figure 6.

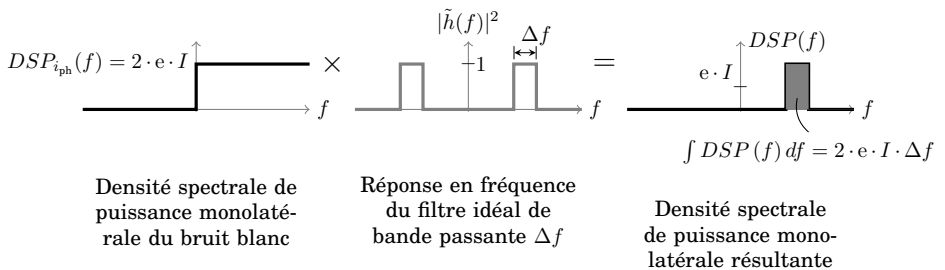


FIGURE 6 – DSP monolatérale et formule de Schottky.

3 Prise en compte du temps de réponse du détecteur

Si on note $i_d(t)$, le courant effectivement fourni par le détecteur, prendre en compte le temps de réponse de celui-ci revient à considérer que l'on ne dispose que d'une moyenne, d'un signal "lissé", ceci peut s'exprimer par une intégrale sur un horizon τ fini :

$$i_d(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t i_{ph}(u) du$$

où plus généralement par un produit de convolution :

$$i_d(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u) i_{ph}(u) du$$

où h est une fonction (qui s'exprime en s^{-1}) caractéristique du détecteur. Par exemple, si le comportement du détecteur est modélisé par un système du premier ordre de constante de temps égale à τ , la fonction h sera écrite selon :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \text{ si } t \geq 0 \quad h(t) = 0 \text{ sinon}$$

Remarque : à tout instant t_0 , $i_d(t_0)$ est une variable aléatoire...mais non Poissonnienne. L'allure du courant du détecteur est illustré sur la figure 7, dans le cas d'un modèle du premier ordre.

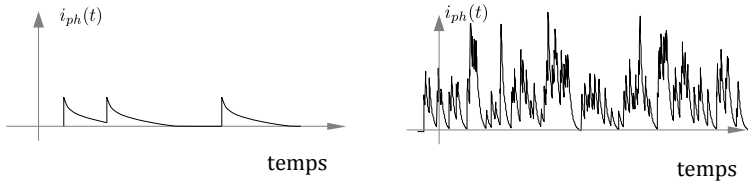


FIGURE 7 – Allure du courant du photodétecteur. À gauche : dans le cas où le délai moyen entre photons détectés est long devant la constante de temps τ du détecteur. À droite : cas où ce délai est proche de τ

La variance du bruit de détection s'obtient par l'intermédiaire de la densité spectrale de i_d , reliée à celle de i_{ph} par :

$$DSP_{i_d}(f) = \left| \tilde{h}(f) \right|^2 DSP_{i_{ph}}(f)$$

La variance est ainsi obtenue :

$$\begin{aligned}\text{Var}[i_d] &= \int_{-\infty}^{+\infty} DSP_{i_d}(f) df = e \cdot I \cdot \int \left| \tilde{h}(f) \right|^2 df \\ &= e \cdot I \cdot \int |h(t)|^2 dt = e \cdot I \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^2} e^{-2t/\tau} dt = e \cdot I \cdot \frac{1}{2\tau}\end{aligned}$$

Par comparaison de cette formule à la formule de Schottky (1), la bande équivalente de bruit Δf est donc telle que :

$$2eI\Delta f = eI\frac{1}{2\tau} \quad \rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{4\tau} = \frac{\pi}{2}BP_{-3\text{dB}}$$

4 Cas du photomultiplicateur

Le processus de multiplication entraîne que le nombre d'électrons $N_{\text{pm}T}$ produits au niveau de l'anode pendant un intervalle de temps T s'écrit :

$$N_{\text{PM}T} = G \cdot N_{\text{ph}T}$$

où G (sans unité) désigne l'efficacité de multiplication globale. $N_{\text{pm}T}$ n'est donc plus une variable Poissonnienne... Sa valeur moyenne :

$$\mathbf{E}[N_{\text{PM}T}] = G \cdot \mathbf{E}[N_{\text{ph}T}] = G \cdot \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot T$$

diffère en particulier de la valeur de sa variance :

$$\text{var}[N_{\text{PM}T}] = G^2 \cdot \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot T \quad \sigma_{N_{\text{ph}T}} = G \cdot \sqrt{\eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot T}$$

Finalement, par un raisonnement identique à celui utilisé au paragraphe 2.2, on obtient les propriétés du courant du PM au niveau de l'anode :

$$\mathbf{E}[i_{\text{PM}}] = I_{\text{PM}} = G \cdot \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot e$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[i_{\text{PM}}] &= G^2 \cdot e^2 \cdot \eta \cdot n_{\text{ph}} \cdot 2 \cdot \Delta f \\ &= 2 \cdot G \cdot e \cdot I_{\text{PM}} \cdot \Delta f\end{aligned}$$

$$\sigma_{i_{\text{PM}}} = \sqrt{G} \cdot \sqrt{2 \cdot e \cdot I_{\text{PM}} \cdot \Delta f}$$

5 Cas d'une photodiode

Les photodiodes sont utilisées pour mesurer des flux plus élevés que ceux mesurés avec un photomultiplicateur. Le nombre de photons détectés sur une durée T suit bien une loi de Poisson mais sauf à s'intéresser à

des durées T inférieures à la fs , le nombre moyen de photons détectés est élevé, la loi de Poisson se symétrise (voir figure 3) et on peut l'approcher par une loi Gaussienne.

$$\frac{\lambda^N}{N!} e^{-\lambda} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(N-\lambda)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{avec } \sigma = \sqrt{\lambda}$$

L'équation de Schottky pour exprimer la variance du bruit est toujours :

$$\sigma_{i_{\text{ph}}} = \sqrt{2 \cdot e \cdot I \cdot \Delta f}$$