
ETI

Filtrage analogique

I – Introduction

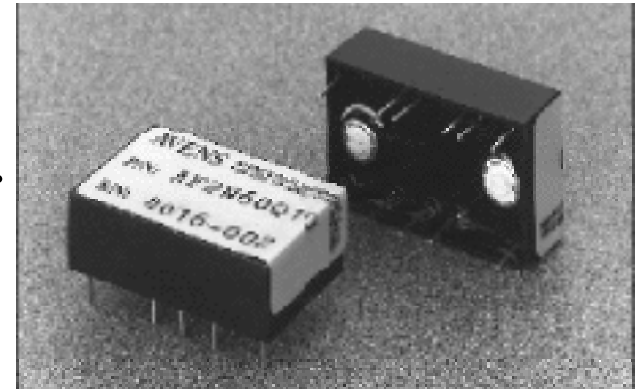
II – Etude des filtres de Butterworth et de Chebychev

III – Filtres actifs

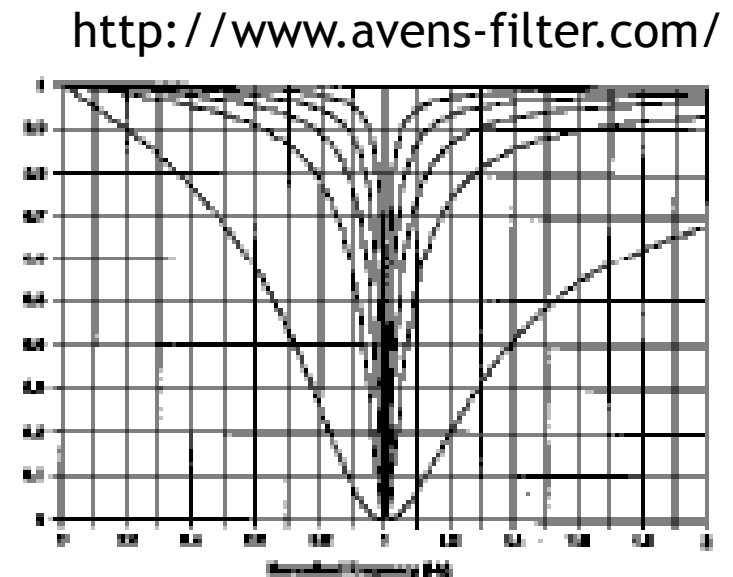
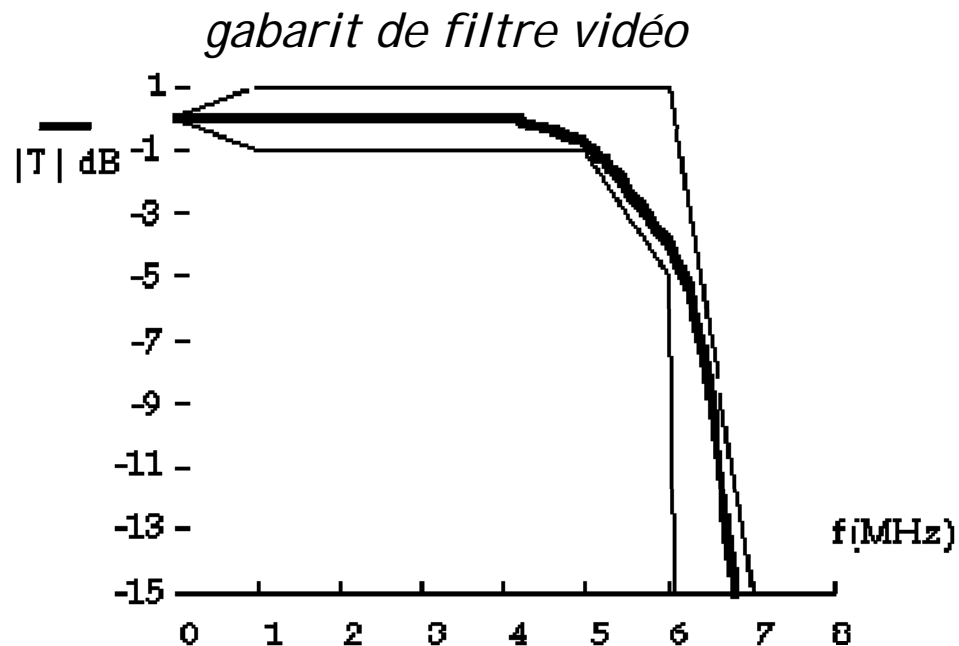
IV – Filtres à capacités commutées

Domaines d'application

- ✓ Traitement de signaux audio, vidéo, radio...
- ✓ Télécommunications, télémétrie...
- ✓ Instrumentation scientifique, médicale, radars...
- ✓ Acquisition numérique de données
(anti-repliement)
- ✓ Réjection de bruit (alimentation électrique...)
- ...



Miniature Filters
Active/Bandpass/Band-Reject



Introduction

TYPE	COMPOSANTS	SPECIFITES
Filtre numérique	Circuits logiques intégrés	<ul style="list-style-type: none"> ▶ Signaux numérisés ▶ $F < 100\text{MHz}$ ▶ convient en grande série ▶ entièrement programmable
Filtres passifs	Circuit discret L et C, Composants piézoélectriques (quartz)	<ul style="list-style-type: none"> ▶ F élevée ▶ pas d'alimentation ▶ non intégrable
Filtres actifs	AIL, R et C	<ul style="list-style-type: none"> ▶ $F < 1\text{ MHz}$ ▶ besoin d'alimentation ▶ tension filtrée faible $< 12\text{V}$
Filtres à capacité commutée	AIL, Interrupteur commandé MOS, R et C intégré	<ul style="list-style-type: none"> ▶ $F < \text{qq MHz}$ ▶ besoin d'alimentation ▶ intégrable ▶ fréquence programmable

<http://ressource.electron.free.fr/bts/cours/le-filtrage-actif-passif.pdf>

AIL : Amplificateur Intégré Linéaire

Introduction

Historique :

1920-1960 : filtres passifs RLC

1960 : filtres actifs avec ALI

1970 : circuits intégrés (→VLSI)

1980 : filtres numériques, DSP

1980 : filtres analogiques



< filtre passif LC séparateur de voies
pour enceinte acoustique

filtre passif céramique passe-bande >
centré sur 10,7 MHz
pour étage fi de récepteur FM



Généralités

Soit un signal $u(t)$ comprenant plusieurs composantes sinusoïdales. Un filtre est un dispositif dont la fonction de transfert complexe \underline{T} permet d'isoler certaines composantes en éliminant les composantes de fréquences indésirables.

Pour qu'un filtre ne *déforme* pas les signaux compris dans une certaine bande passante (BP), il faut réunir deux conditions :

1-Le module de la fonction de transfert doit être le plus constant possible dans la BP

2-Le temps de propagation de groupe t_g doit être le plus constant possible dans la BP

Par définition, $t_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ => phase ϕ linéaire

Si de plus $|\underline{T}|=0$ pour les fréquences à éliminer, alors le filtre est idéal.

En pratique, on se contente d'approcher ce filtre idéal. La réalisation de filtres se fait à partir de polynômes d'approximation optimisant au mieux les contraintes demandées puis d'un éventuel ajout en cascade d'un correcteur de phase.

- une BP plate au maximum pour les filtres de **Butterworth**
- une bande de transition étroite au dépend d'une ondulation dans la BP pour les filtres de **Chebyshev**
- une phase linéaire dans la BP pour les filtres de **Bessel**
- autres filtres (Chebyshev de type II, Cauer ...)

Caractérisation d'un filtre

Pour une étude complète :

Réponse fréquentielle :

=>Diagrammes de Bode

-module de la fonction de transfert

- t_g

Réponse temporelle :

-réponse impulsionnelle

-réponse indicielle

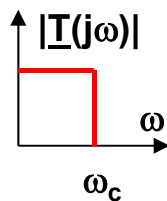
Notations

Notations :

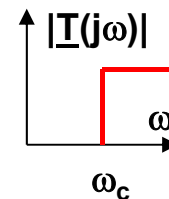
Fonction de transfert complexe : $\underline{I}(j\omega)$

Module : $T(\omega) = |\underline{I}(j\omega)|$

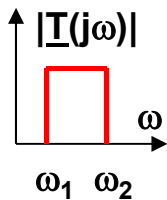
Gain en dB : $G_{dB} = 20 \cdot \log T(\omega)$



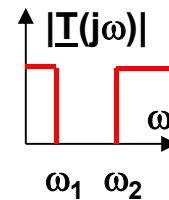
Filtre passe-bas



Filtre passe-haut



Filtre passe-bande



Filtre coupe-bande

Etude précise des filtres passe-bas
Il suffira d'effectuer des changements de variables pour les autres filtres

Bonne connaissance des filtres passe-bas d'ordre 1 et 2

Rappels sur les filtres passe-bas

Passe-bas 1^{er} ordre

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

ω_c est la fréquence de coupure à -3 dB

Passe-bas 2nd ordre

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

m est le facteur d'amortissement

Q est le facteur de qualité

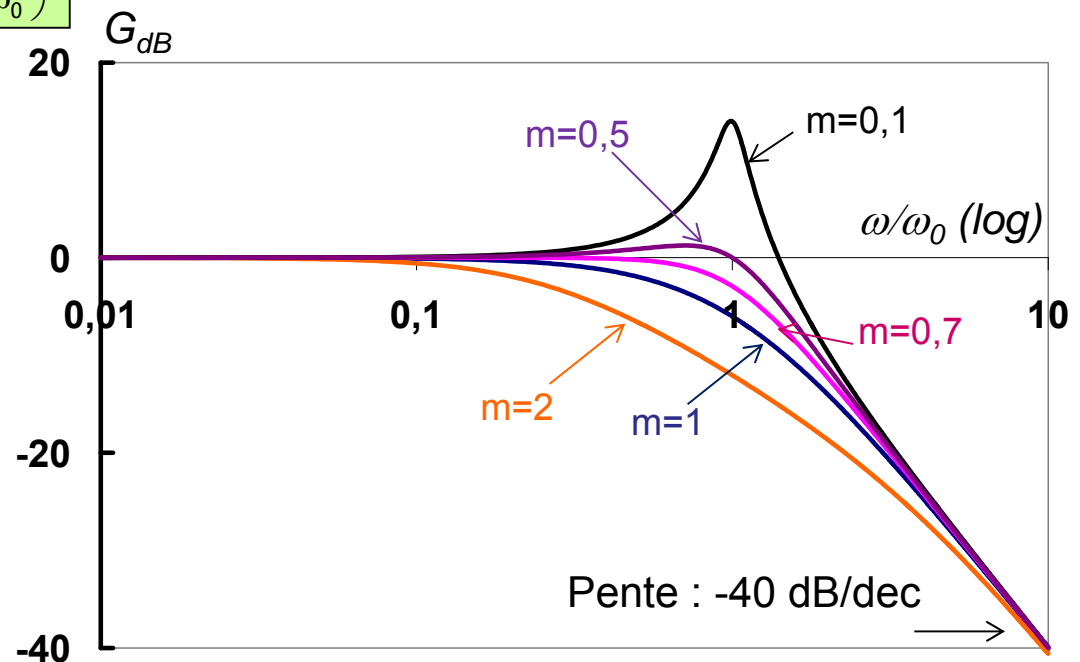
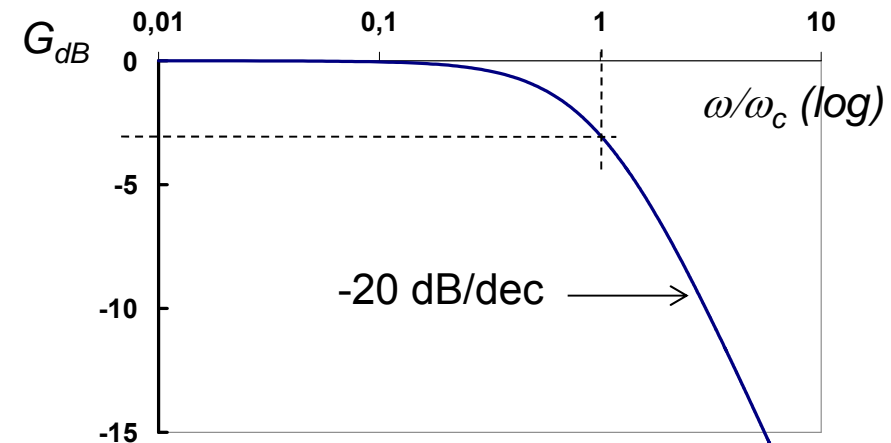
ω_0 est la fréquence propre

$0 < m < 0,7$: résonance à $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$

$m > 0,7$: il n'y a plus de résonance

$m = 0,7$: réponse la plus plate dans la BP

$m \geq 1$: T est décomposable en un produit de 1^{er} ordre



Notion de gabarit

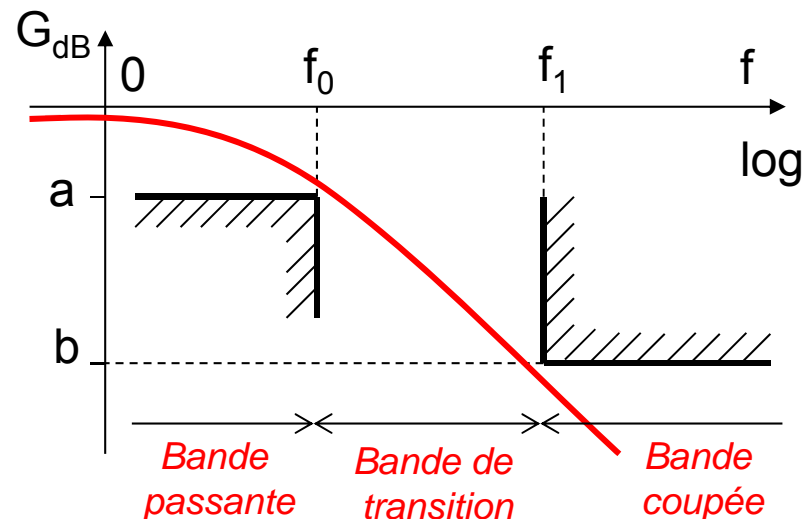
Cahier des charges :

Construire un filtre *passé-bas* qui ne transmet que les signaux de fréquence $<$ à f_0 .

G_{dB} doit posséder :

- une valeur minimale **a** dans la bande de fréquences à transmettre
- une valeur maximale **b** dans la bande de fréquences à éliminer

-Le gabarit est caractérisé par 2 points (f_0, a) et (f_1, b) .



Autres spécifications possibles d'un gabarit :

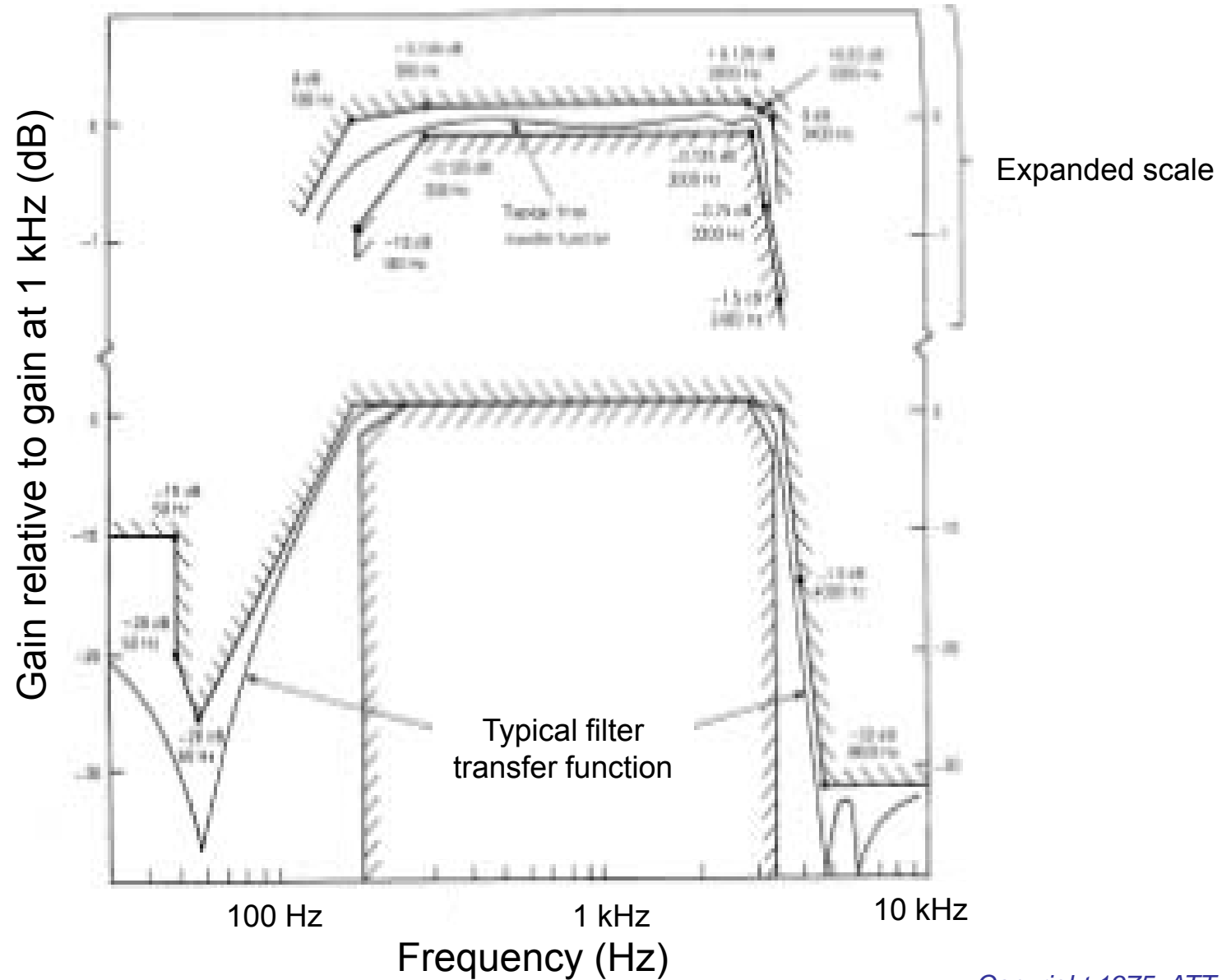
Ondulation dans la BP

Largeur de la bande de transition

Etc ...

Utilisation d'approximations de filtres réels :
Butterworth, Chebychev, Bessel, Cauer ...

Ex : Gabarit de transmission téléphonique



Filtrage analogique

I – Introduction

II – Etude des filtres de Butterworth et de Chebychev

III – Filtres actifs

IV – Filtres à capacités commutées

Filtres de Butterworth

Utilisé pour sa réponse extrêmement plate dans la BP

Le module de la fonction de transfert $T(\omega)$ est cherché sous la forme :

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

où n est l'ordre du filtre

La réponse fréquentielle est normalisée par rapport à la pulsation de coupure (ou caractéristique) ω_c pour laquelle l'atténuation est de -3 dB

On pose $x = \omega/\omega_c$.

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$$

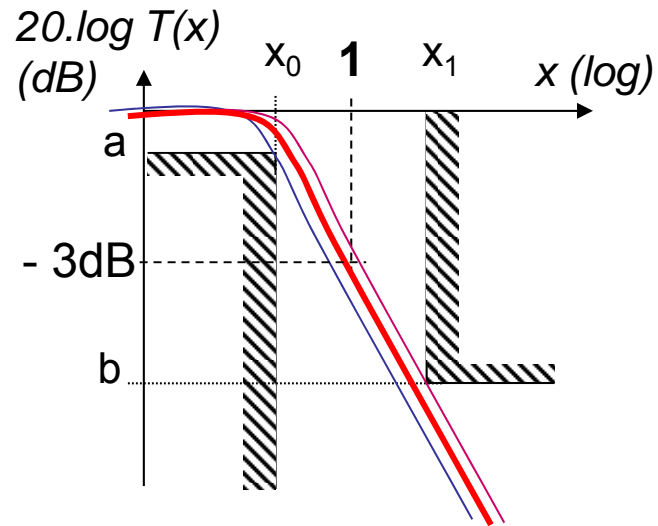
Pour $x=1$: $20 \cdot \log T(x) = -3 \text{ dB}$

Quel que soit n , toutes les courbes passent par -3dB pour $x=1$, soit $f=f_c$

Pour $x < 1$: $20 \cdot \log T(x) > -3 \text{ dB}$

La fréquence de coupure est définie à -3dB quel que soit n

Détermination de n et f_c : cas général



$$x = f / f_c$$

n = ordre du filtre

$$a \geq -3 \text{ dB}$$

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$$

Conditions limites :

$$\begin{cases} 20.\log T(x_0) > a \\ 20.\log T(x_1) < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^{2n} < 10^{-a/10} - 1 & (1) \\ x_1^{2n} > 10^{-b/10} - 1 & (2) \end{cases}$$

(2) divisé par (1) donne la valeur de n minimum.

En pratique on prend la plus petite valeur entière de n qui satisfait :

$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\log \left(\frac{10^{-a/10} - 1}{10^{-b/10} - 1} \right)}{\log(f_0/f_1)}$$

On calcule alors avec (1) et (2) les fréquences de coupure limites :

$$f_{c,0} = \frac{f_0}{(10^{-a/10} - 1)^{1/2n}}$$

$$f_{c,1} = \frac{f_1}{(10^{-b/10} - 1)^{1/2n}}$$

On choisit la fréquence de coupure au « milieu » (moyenne géométrique) : $f_c = \sqrt{f_{c,0} f_{c,1}}$

Fonction de transfert

But : trouver une fraction rationnelle complexe $\underline{T}(s)$ (avec $s=jx$) qui admette $T(x)$ comme module.

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$$

Méthode : on factorise le polynôme $P(x) = 1 + x^{2n}$

On montre que $P(x)$ apparaît ainsi comme le carré du module du polynôme $\underline{P}(s)$ suivant (n impair) :

$$\underline{P}(s) = (1+s)(a^2+b^2+2bs+s^2)(\dots)$$

La fonction de transfert normalisée s'écrit alors :

$$\underline{T}(s) = \frac{1}{\underbrace{(1+s)}_{\text{si } n \text{ est impair}}(a^2 + b^2 + 2bs + s^2)(\dots)}$$

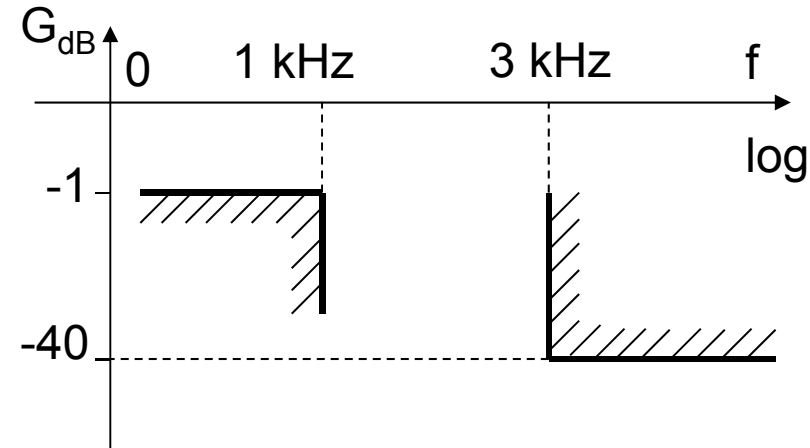
En pratique, l'expression de $\underline{P}(s)$ donc de $\underline{T}(s)$ ne dépend que de l'ordre n du filtre => utilisation de tables pour les coefficients

Quelques polynômes de Butterworth

n	$P(s)$
1	$(1 + s)$
2	$(1 + 1.414s + s^2)$
3	$(1 + s)(1 + 1.000s + s^2)$
4	$(1 + 1.848s + s^2)(1 + 0.765s + s^2)$
5	$(1 + s)(1 + 1.618s + s^2)(1 + 0.618s + s^2)$
6	$(1 + 1.932s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.518s + s^2)$
7	$(1 + s)(1 + 1.802s + s^2)(1 + 1.247s + s^2)(1 + 0.445s + s^2)$
8	$(1 + 1.962s + s^2)(1 + 1.663s + s^2)(1 + 1.111s + s^2)(1 + 0.390s + s^2)$
9	$(1 + s)(1 + 1.879s + s^2)(1 + 1.532s + s^2)(1 + 1.000s + s^2)(1 + 0.347s + s^2)$
10	$(1 + 1.975s + s^2)(1 + 1.782s + s^2)(1 + 1.414s + s^2)(1 + 0.908s + s^2)(1 + 0.313s + s^2)$

Exemple récapitulatif

Déterminer la fonction de transfert du filtre passe-bas de Butterworth qui satisfait au gabarit suivant :



- 1) Détermination de l'ordre : $n > 4,8$ donc on choisit $n=5$
- 2) Fréquences de coupure : $f_{c,0}=1,145$ kHz ; $f_{c,1}=1,194$ kHz d'où $f_c=1,17$ kHz
- 3) Détermination de la fonction de transfert normalisée à partir de la table :

$$\underline{T}(s) = \frac{1}{(1+s)(1+1,618s+s^2)(1+0,618s+s^2)}$$

- 4) Fonction de transfert : $\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_c}\right)\left(1+1,618j\frac{\omega}{\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)\left(1+0,618j\frac{\omega}{\omega_c}+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)}$

$$\underline{T}(jf) = \frac{1}{(1+j.8,5.10^{-4}f)(1+j.1,38.10^{-3}f-7,3.10^{-7}f^2)(1+j.5,2.10^{-4}f-7,3.10^{-7}f^2)}$$

Filtres de Chebychev

Utilisé quand les spécifications du gabarit permettent une ondulation dans la BP
La fonction $T(x)$ est cherchée sous la forme :

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}}$$

ε est un nombre

$C_n(x)$ est un polynôme défini par récurrence

$C_0(x) = 1$; $C_1(x) = x$;

$C_{n+1}(x) = 2x C_n(x) - C_{n-1}(x)$

C_n est oscillante dans la BP et décroissante dans la bande d'arrêt

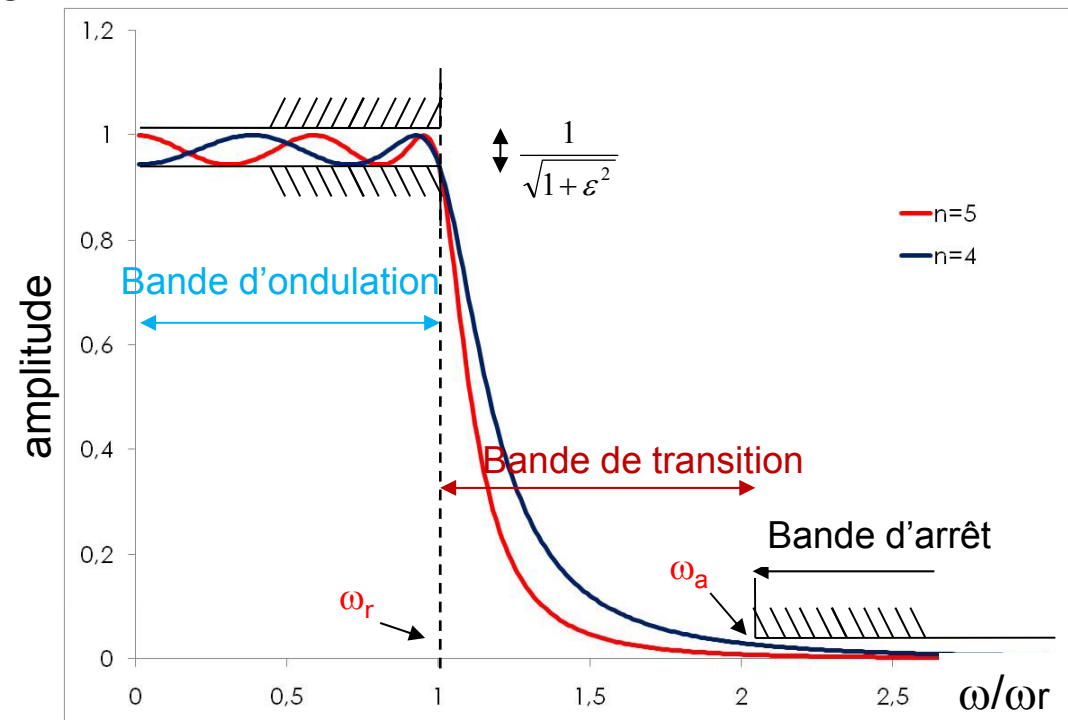
$x = \omega/\omega_r$ où ω_r est la pulsation délimitant la bande dans laquelle on accepte une

ondulation r définie par $r^2 = 1 + \varepsilon^2$

Normalisation par rapport à ω_r

La fréquence de coupure ω_r est définie à $-10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2)$ dB qui vaut -3 dB uniquement pour $\varepsilon = 1$.

-Le nb d'extrema présents dans la bande d'ondulation est égal à n .



Calcul de l'ordre

La donnée de la largeur de la bande d'ondulation fixe ω_r .

Il suffit de connaître :

- un point de la bande d'arrêt ($\omega_a, G_{dB}(\omega_a)=G_{dB,a}$)
- l'amplitude de l'ondulation admise
pour déterminer l'ordre n du filtre

$$n \geq \frac{\arg \cosh \sqrt{\frac{10^{-b/10} - 1}{10^{-a/10} - 1}}}{\arg \cosh \frac{\omega_a}{\omega_r}}$$

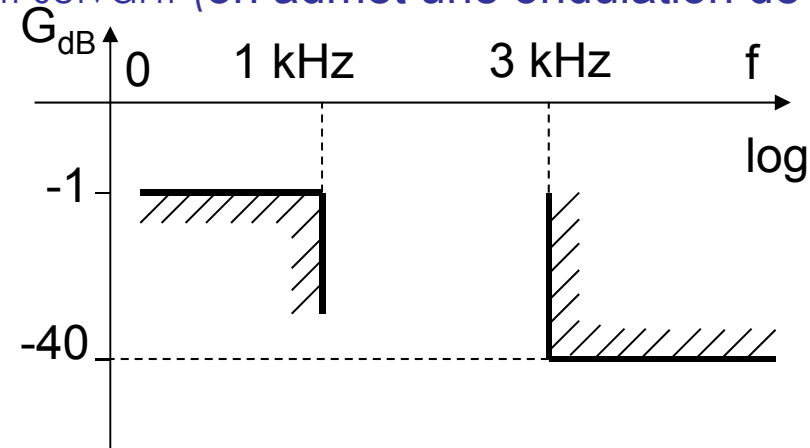
Polynômes de Chebychev

On détermine $T(x)$ compte tenu de l'ondulation tolérable r et de l'ordre n
Voici quelques polynômes de Chebychev :

n	$P(s)$ pour $r = 0.5 \text{ dB} = 1.059$ ou $\epsilon = 0.3493$	$P(s)$ pour $r = 1.0 \text{ dB} = 1.122$ ou $\epsilon = 0.5089$
1	$(1 + 0.349s)$	$(1 + 0.509s)$
2	$(1 + 0.940s + 0.659s^2)$	$(1 + 0.996s + 0.907s^2)$
3	$(1 + 1.596s)(1 + 0.548s + 0.875s^2)$	$(1 + 2.024s)(1 + 0.497s + 1.006s^2)$
4	$(1 + 2.376s + 2.806s^2)(1 + 0.330s + 0.940s^2)$	$(1 + 2.411s + 3.579s^2)(1 + 0.283s + 1.014s^2)$
5	$(1 + 2.760s)(1 + 1.230s + 2.097s^2)(1 + 0.216s + 0.965s^2)$	$(1 + 3.454s)(1 + 1.091s + 2.329s^2)(1 + 0.181s + 1.012s^2)$
6	$(1 + 3.692s + 6.370s^2)(1 + 0.719s + 1.695s^2)(1 + 0.152s + 0.977s^2)$	$(1 + 3.722s + 8.019s^2)(1 + 0.609s + 1.793s^2)(1 + 0.126s + 1.009s^2)$
7	$(1 + 3.904s)(1 + 1.818s + 3.939s^2)(1 + 0.472s + 1.477s^2)(1 + 0.112s + 0.984s^2)$	$(1 + 4.868s)(1 + 1.606s + 4.339s^2)(1 + 0.392s + 1.530s^2)(1 + 0.092s + 1.007s^2)$
8	$(1 + 4.981s + 11.36s^2)(1 + 1.037s + 2.788s^2)(1 + 0.335s + 1.349s^2)(1 + 0.086s + 0.988s^2)$	$(1 + 5.010s + 14.23s^2)(1 + 0.876s + 2.934s^2)(1 + 0.276s + 1.382s^2)(1 + 0.070s + 1.006s^2)$

Exemple récapitulatif

Déterminer la fonction de transfert du filtre passe-bas de Chebychev qui satisfait au gabarit suivant (on admet une ondulation de 1dB dans la BP) :



1) Détermination de l'ordre du gabarit : $r=1 \text{ dB}=1,122$ donc $\varepsilon=0,5089$
D'où $n>3,4$ donc on choisit **$n=4$**

2) Détermination de la fonction de transfert normalisée à partir de la table :

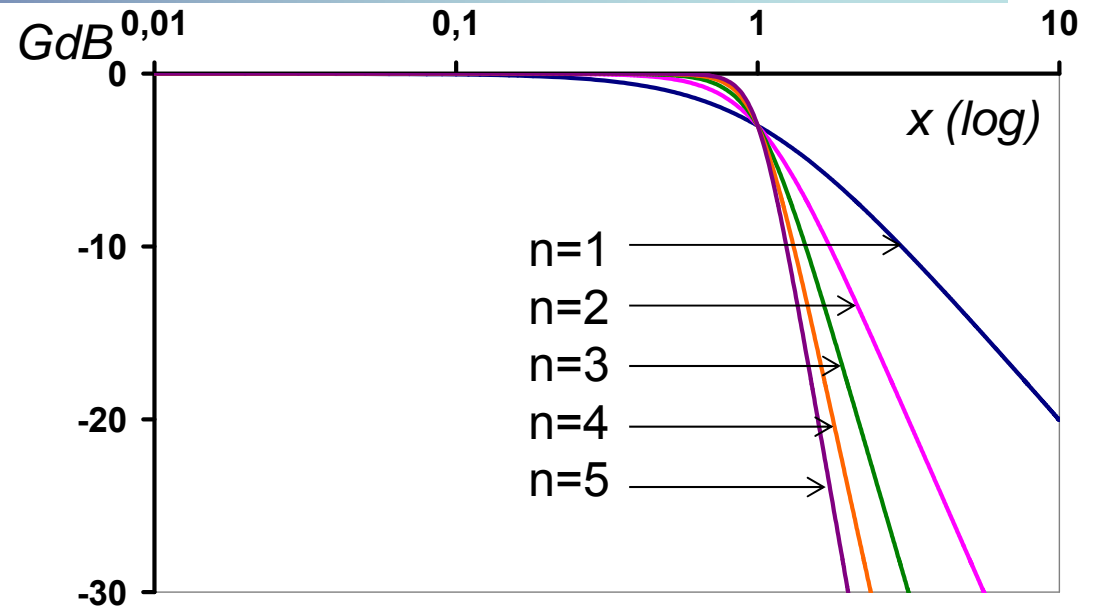
$$\underline{T}(s) = \frac{1}{(1 + 2,411s + 3,579s^2)(1 + 0,283s + 1,014s^2)}$$

3) Fonction de transfert : $\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + 2,411j\frac{\omega}{\omega_r} + \left(\sqrt{3,579}j\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\right)\left(1 + 0,283j\frac{\omega}{\omega_r} + \left(\sqrt{1,014}j\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\right)}$

Comparaison Butterworth - Chebychev

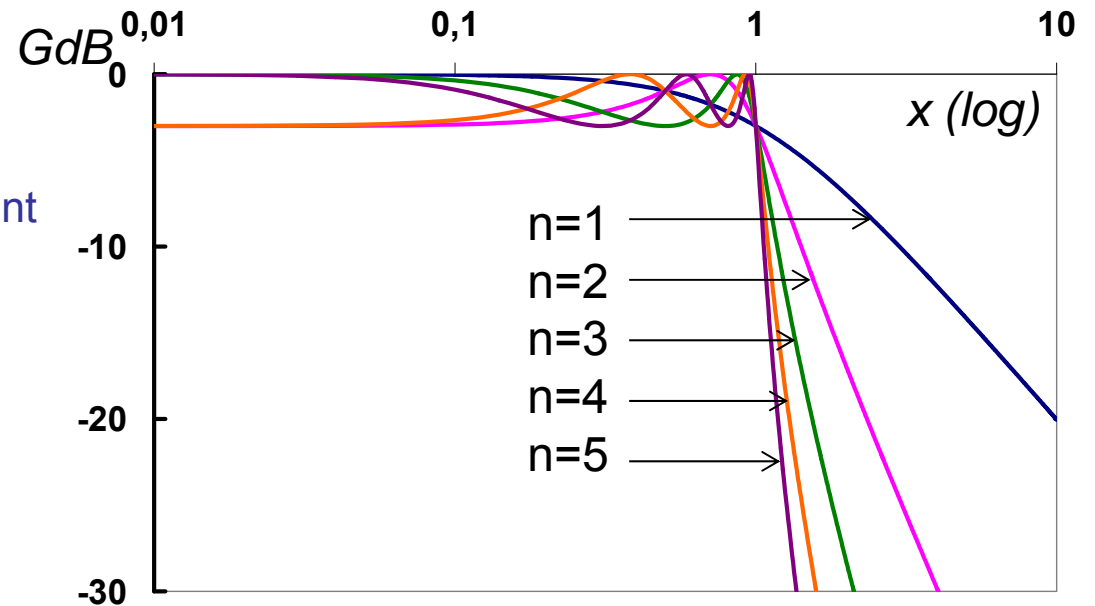
Butterworth

La fréquence de coupure est la même quel que soit n
 Coupure de pente relativement faible (mais peut être augmentée avec n plus grand)
 Réponse très plate dans la BP
 Assez bien adapté aux signaux rapides

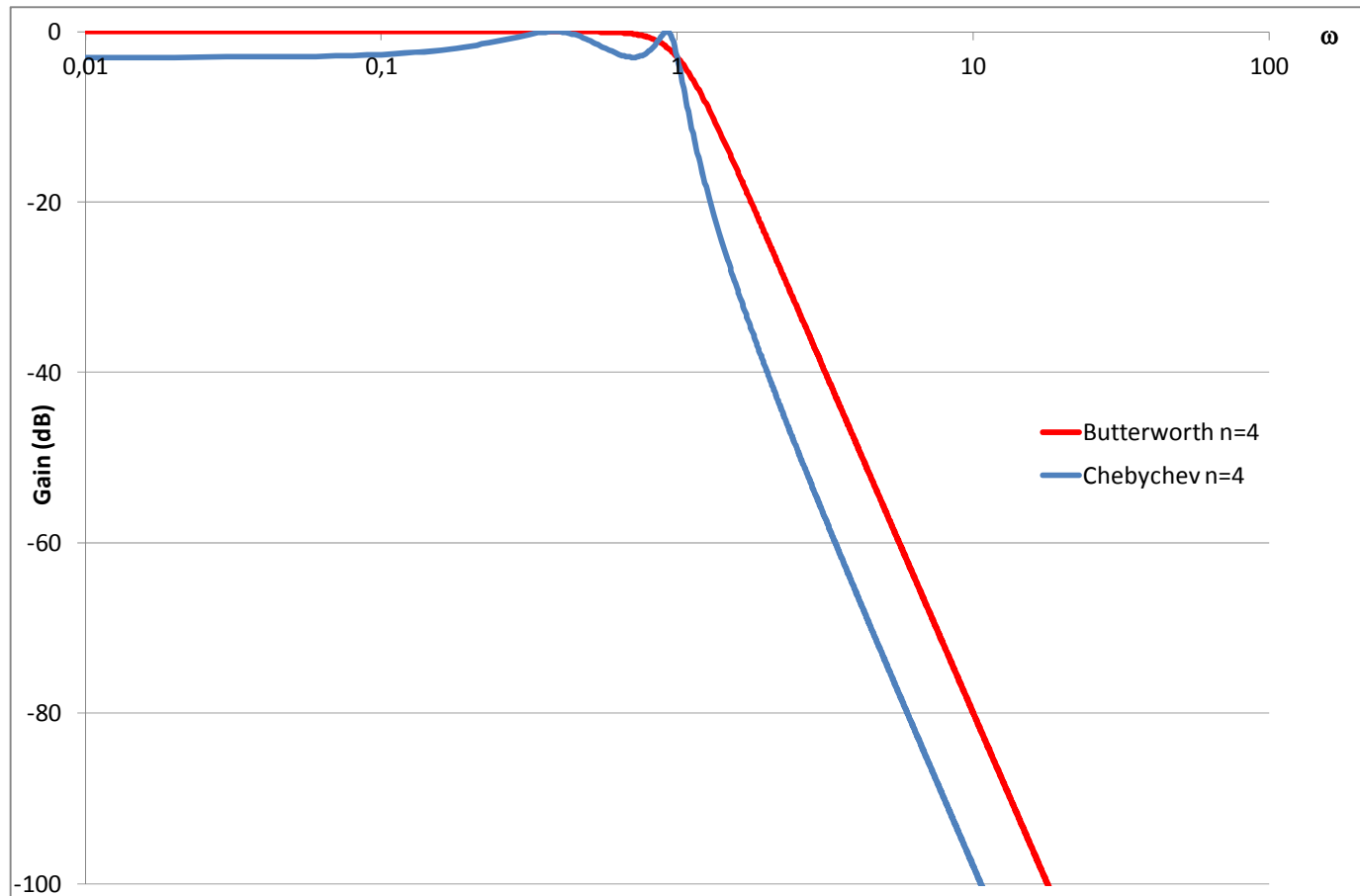


Chebychev

Coupe à ordre identique plus rapidement que Butterworth
 Ondulations dans la BP
 Déconseillé pour les signaux rapides (déformation importante)



Comparaison Butterworth - Chebychev



Autres formes de réponse

Filtres de Legendre :

- Il n'y a pas d'ondulation dans la bande passante.
- La coupure est plus raide que Butterworth, mais moins raide que Chebychev

Filtres de Bessel :

- La coupure n'est pas très raide
- La phase est très linéaire

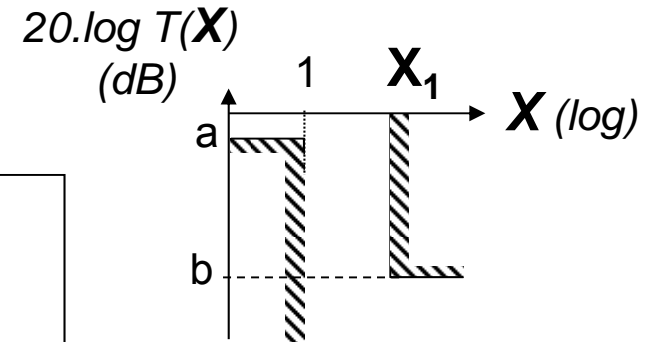
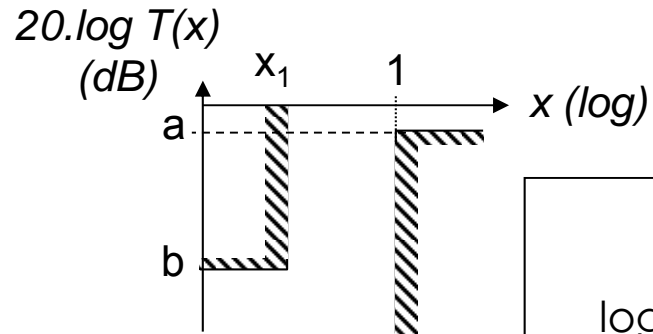
Filtres de Cauer (non polynômiaux) :

- Comportement de Chebychev en bande passante et en bande d'arrêt
- La coupure est très raide
- La phase n'est pas linéaire (les signaux sont assez déformés).

Transformations

Cas fréquent : $a = -3\text{dB}$ et normalisation par rapport à ω_0

Passe-haut \Leftrightarrow passe-bas



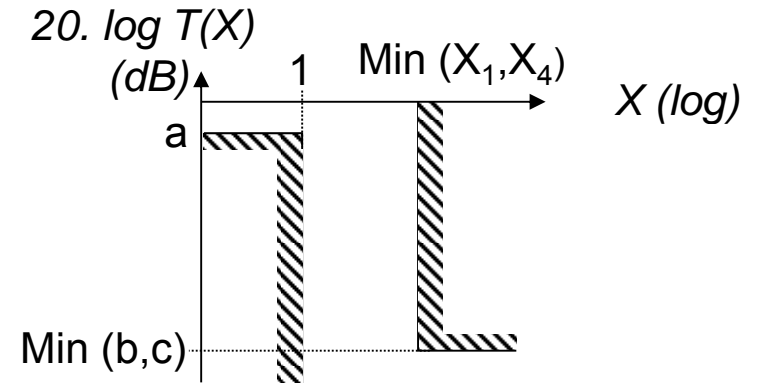
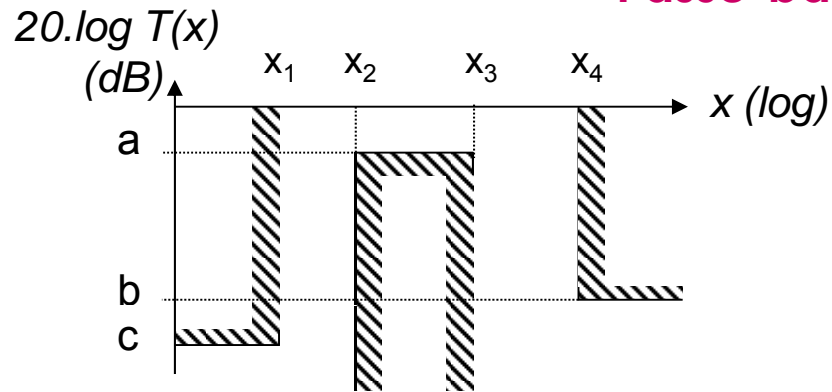
$$\underline{s} \rightarrow \underline{S} = 1 / \underline{s}$$

$$x \rightarrow X = 1 / x$$

$$\log x \rightarrow \log X = -\log x$$

Symétrie par rapport à $x = 1$

Passe-bande \Leftrightarrow passe-bas

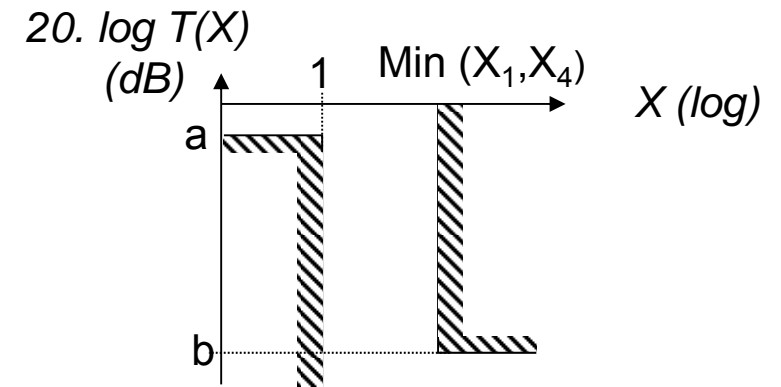
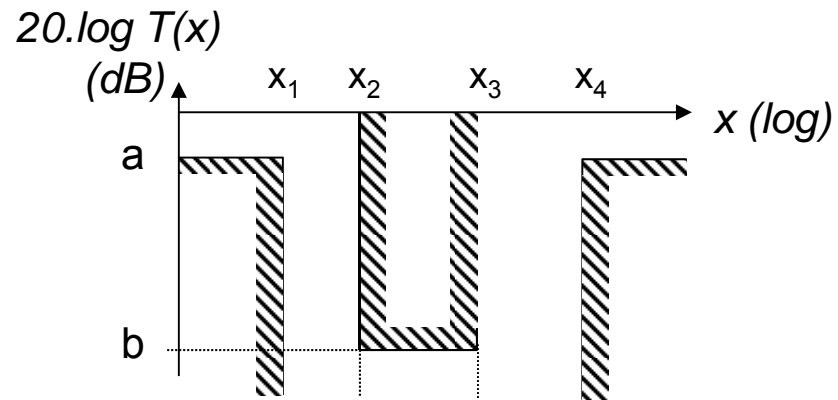


$$\underline{s} \rightarrow \underline{S} = (\underline{s} + 1/\underline{s}) / \Delta x \text{ avec } \Delta x = (f_3 - f_2)/f_0 \text{ et } f_0 = \sqrt{f_2 f_3}$$

$$x \rightarrow X = \frac{|f^2 - f_0^2|}{f(f_3 - f_2)}$$

Transformations

Coupe-bande \Leftrightarrow passe-bas



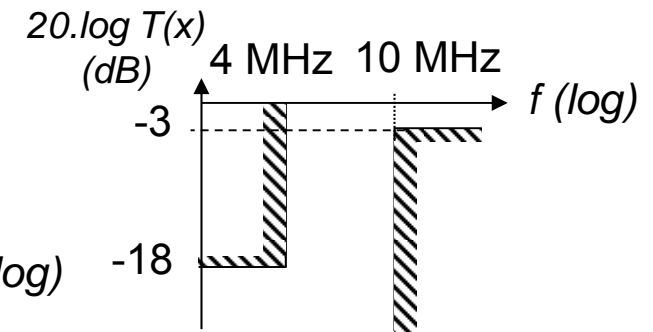
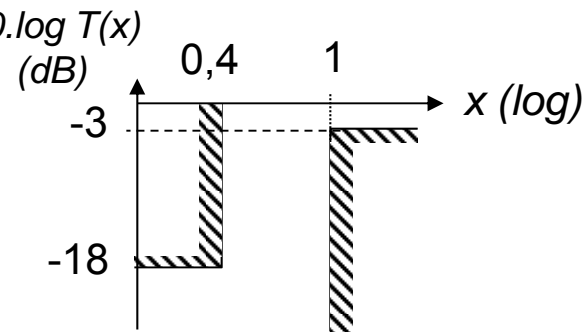
$$\underline{s} \rightarrow \underline{S} = \Delta x / (\underline{s} + 1 / \underline{s}) \quad \text{avec } \Delta x = (f_3 - f_2) / f_0 \quad \text{et } f_0 = \sqrt{f_2 f_3}$$

Exemple

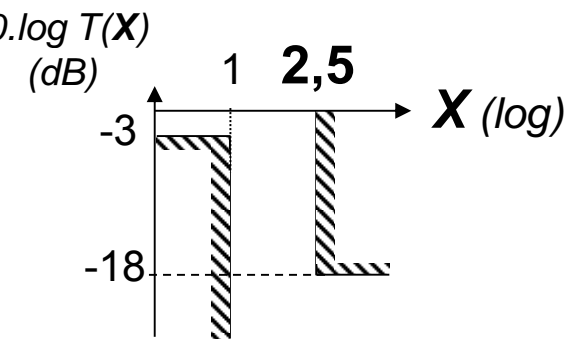
Déterminer à l'aide d'un polynôme de Butterworth la fonction de transfert $\underline{T}(s)$ du filtre passe-haut défini par le gabarit ci-contre :

1) Normalisation du gabarit :

$$f_0 = 10 \text{ MHz}$$



2) Transposition vers le passe-bas correspondant :



3) Étude du filtre passe-bas : $n > 2,25$ donc $n=3$

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{1}{(1+\underline{s})(1+\underline{s}+\underline{s}^2)} = \frac{1}{1+2\underline{s}+2\underline{s}^2+\underline{s}^3}$$

4) Transformation vers le passe-haut :

$$\underline{T}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}^3}{1+2\underline{s}+2\underline{s}^2+\underline{s}^3}$$

soit

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^3}{1+2\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)+2\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^3}$$

Filtrage analogique

I – Introduction

II – Etude des filtres de Butterworth et de Chebychev

III – Filtres actifs

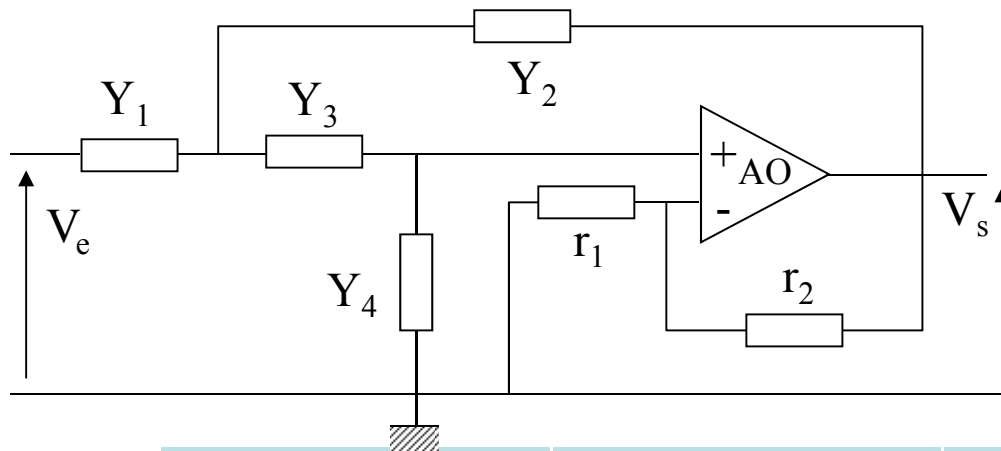
IV – Filtres à capacités commutées

Filtrage actif

- Principe = mise en cascade de cellules élémentaires du second ordre à base d'ALI
- Intérêts
 - cellules élémentaires de faible impédance de sortie (et forte impédance d'entrée) => on peut utiliser la mise en facteur de $\underline{T}(s)$
 - Conception et mise en œuvre simplifiée
 - Intégration possible (car pas d'inductance)
- Limitations
 - Sensibilité aux variations des valeurs des composants
 - Distorsion du signal : saturation -> excursion limitée
slew rate -> bande passante limitée
 - Nécessite des alimentations continues pour les ALI (consommation d'énergie)
 - Bruit généré par les ALI
 - Risque d'instabilité (systèmes à contre-réaction)

Filtres de Sallen-Key

Cellule de Sallen-Key d'ordre 2



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{K Y_1 Y_3}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3(Y_4 - K Y_2)}$$

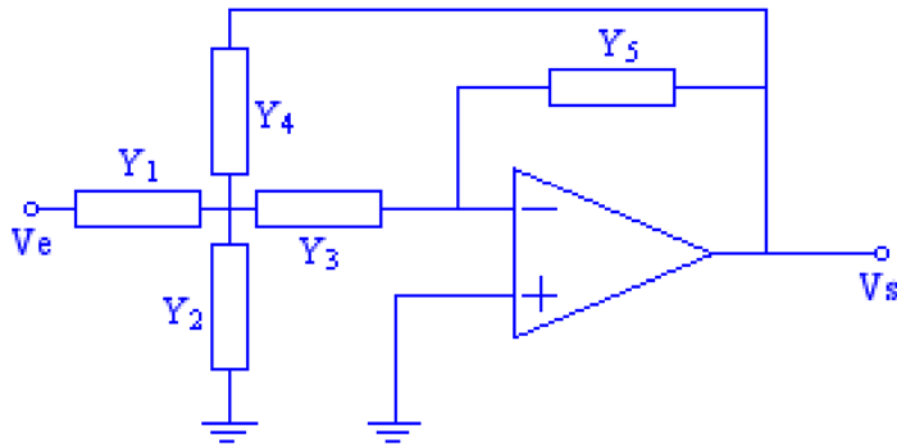
avec $K = 1 + r_2/r_1$

On choisit les admittances Y_i (capacités ou résistances) suivant le type de filtre à réaliser

	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande
Résistances	Y_1 et Y_3	Y_2 et Y_4	Y_1, Y_2
Capacités	Y_2 et Y_4	Y_1 et Y_3	Y_3
			$Y_4 = R // C$

Filtres de Rauch

Cellule de Rauch d'ordre 2



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

Voir TD pour le calcul

On choisit les admittances Y_i (capacités ou résistances) suivant le type de filtre à réaliser

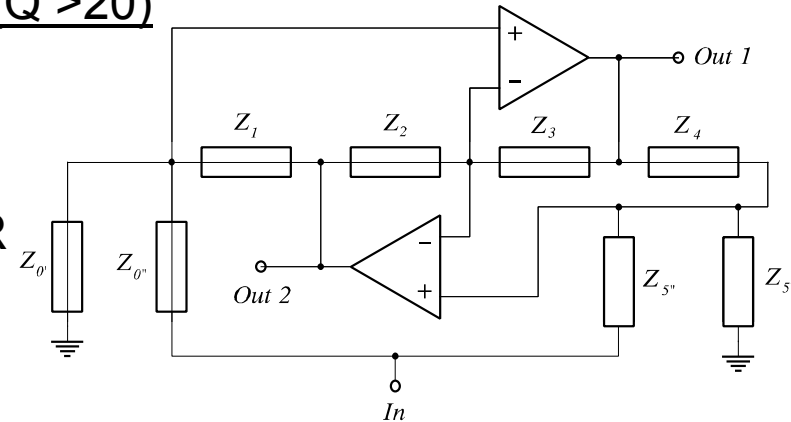
	Passe-bas	Passe-haut	Passe-bande
Résistances	Y_1, Y_3 et Y_4	Y_2 et Y_5	Y_1, Y_2 et Y_5
Capacités	Y_2 et Y_5	Y_1, Y_3 et Y_4	Y_3 et Y_4

Autres types de filtres

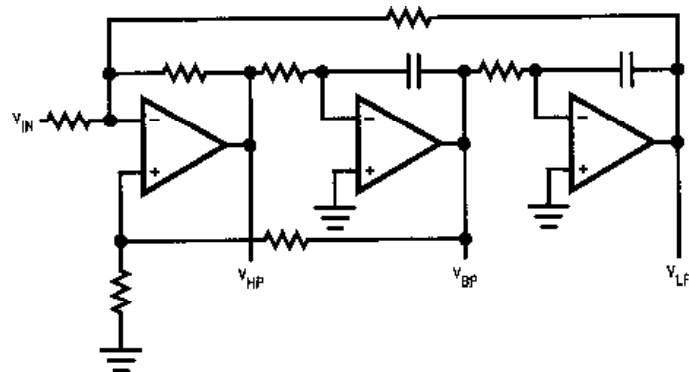
Filtres actifs à convertisseur d'impédance ($Q > 20$)

Exemple : filtre à girateur d'Antoniu

Les impédances Z_i sont des C ou des R



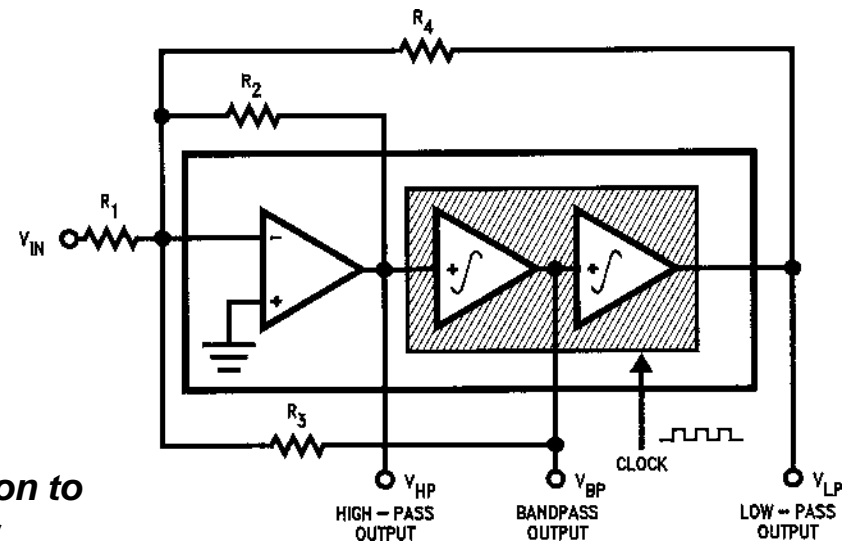
Filtres actifs à variables d'états



(d) Universal State-Variable 2nd-Order Active Filter 1122152

From TI Application Note 779 A Basic Introduction to Filters - Active, Passive, and Switched Capacitor

Filtres « Capa Com » à variables d'états (MF10)



1122153

Quelle technologie choisir ?

Technologie	Composants	Spécificités	Exemples d'application
Filtres numériques (voir cours STNS en 2A)	Circuits logiques intégrés (FPGA, microcontrôleur, ...)	Signaux numérisés (pré et post filtrage nécessaire !) $F < 100\text{MHz}$ (re)programmable Production en grande série possible	
Filtres passifs	Composants discrets L et C, Quartz pour les HF	F élevée ($< 500\text{MHz}$) Pas d'alimentation Non intégrable	Anti-repliement Rejection du bruit d'alimentation
Filtres actifs	AO, R et C	$F < 1\text{ MHz}$ Tension de sortie limitée	Anti-repliement Audio « High Fidelity »
Filtres à capacité commutée	AO, interrupteurs commandés MOS, R et C intégrés	$F < \text{qq MHz}$ Intégrable Fréquence programmable et précise	Détection de « tonalité » Analyseur de spectre

Comparaison filtre actif - filtre passif

Filtre passif :

- Fonctionne sans alimentation et à des fréquences élevées
- L'utilisation de bobines et de capacités permet d'obtenir tous types de réponse
- Nécessite des bobines : cher (bobine à faible tolérance), encombrant, non-idéal (résistance => facteur de qualité faible en basses fréquences), risque de couplage parasite entre bobines
- Difficulté de mise en œuvre pour les filtres d'ordres élevés (étages dépendants)
- La fonction de transfert dépend de la charge qui doit donc être déterminée très précisément
- Performants jusque 500 MHz

Filtre actif :

- Moins cher en grandes quantités
- Petite taille => parasites moindres
- Intégration possible
- Nécessité d'alimentation de tension, consommation d'énergie
- Excursion du signal limité par la saturation des AO et par le bruit des AO
- Les imperfections des AO à hautes fréquences modifient la fonction de transfert du filtre
- La contre-réaction sur les AO peut conduire à l'instabilité du système
- Utilisation pour des fréquences inférieures à quelques 100 kHz