

Intégration Numérique (Euler)

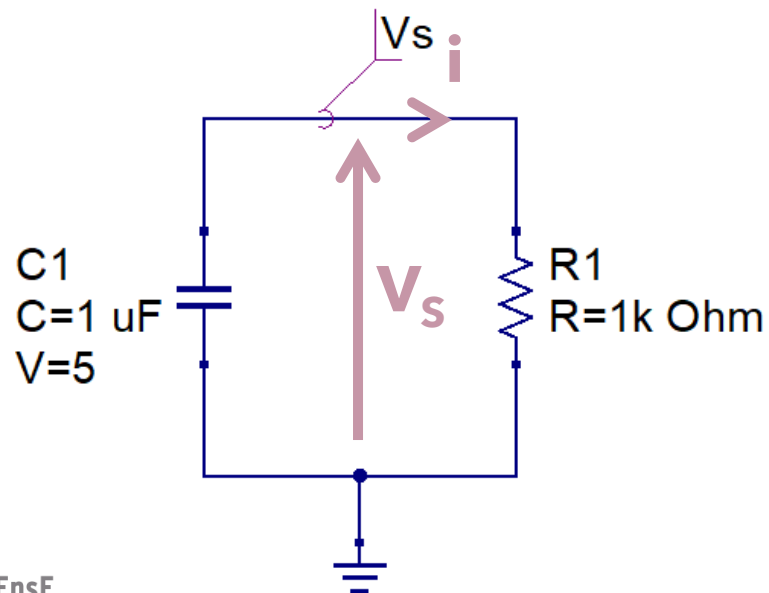
Outils Numériques / Semestre 5
/ Institut d'Optique / B1_4

Cas des équations
différentielles

Approche analytique



- Approche analytique



$$\rightarrow V_s = -R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{dV_s}{dt}$$

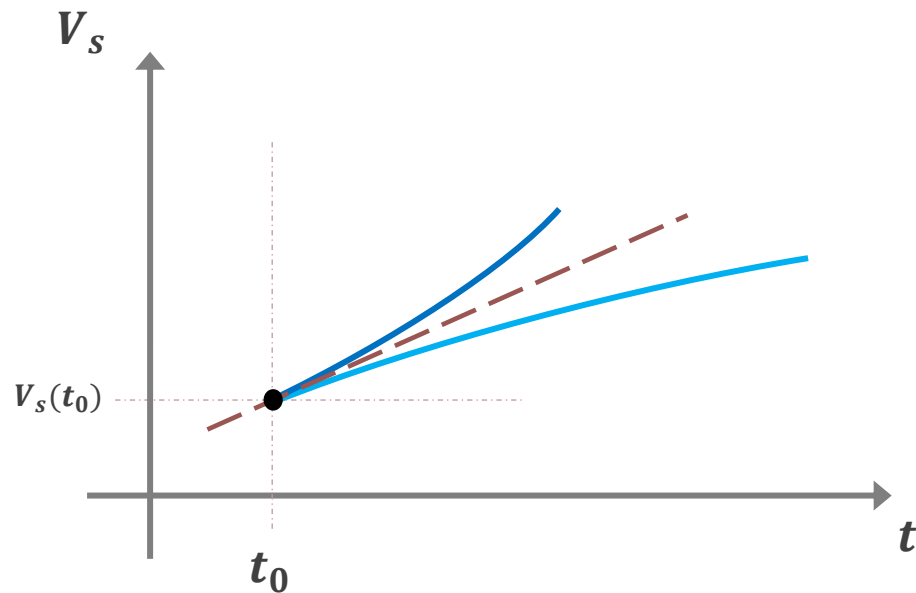
Equation différentielle d'ordre 1

$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

Approche graphique



- Intégration numérique



$$\rightarrow V_s = -R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{dV_s}{dt}$$

Equation différentielle d'ordre 1

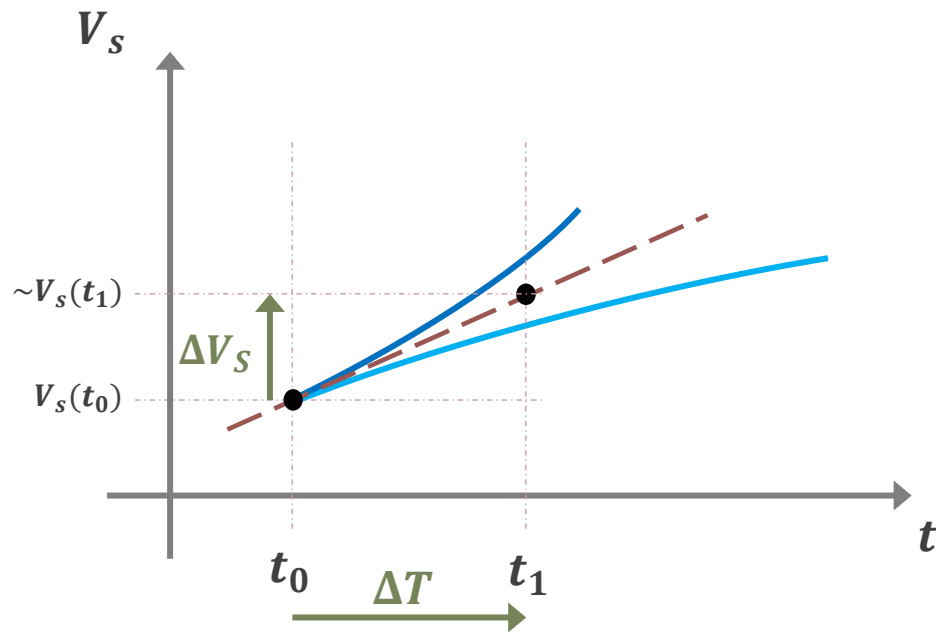
$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

Coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point donné

Approche graphique



- Intégration numérique



$$\rightarrow V_s = -R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{dV_s}{dt}$$

Equation différentielle d'ordre 1

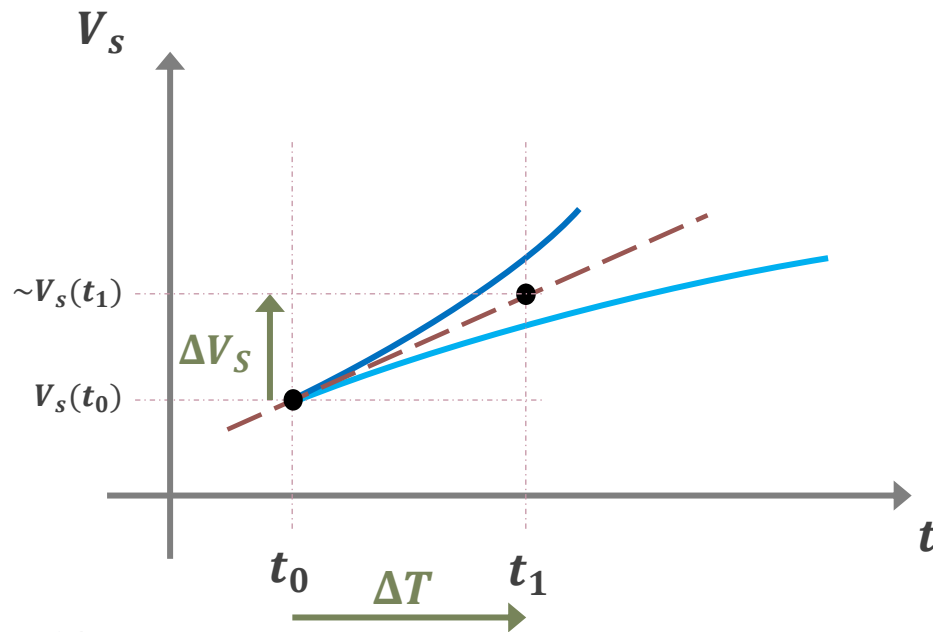
$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

Coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point donné

Approche graphique



- Intégration numérique



$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

Coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point donné

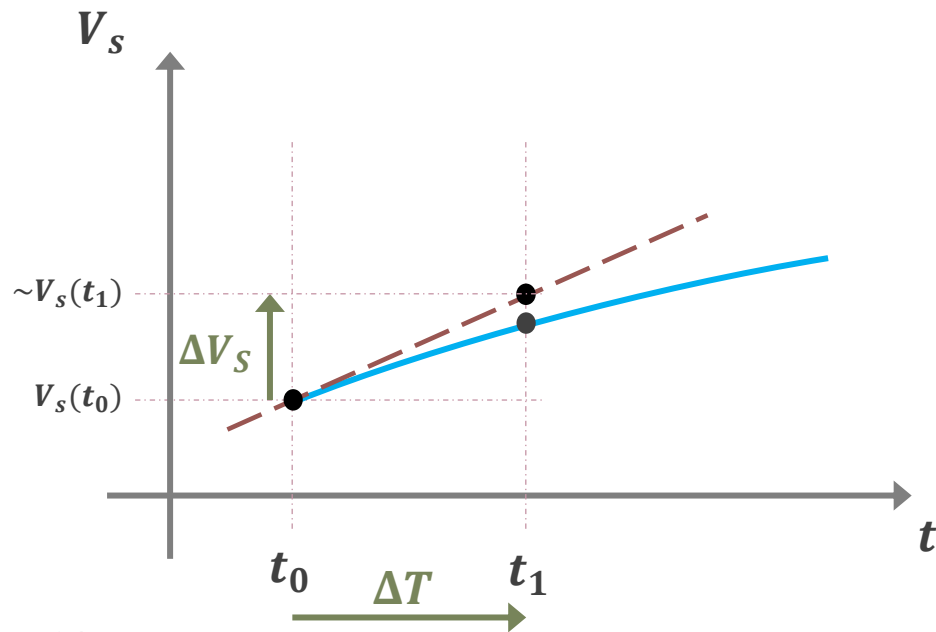
$$\sim V_s(t_1) = V_s(t_0) + \Delta V_s$$

avec
$$\Delta V_s = \Delta T \cdot \left. \frac{dV_s}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Approche graphique



- Intégration numérique



$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

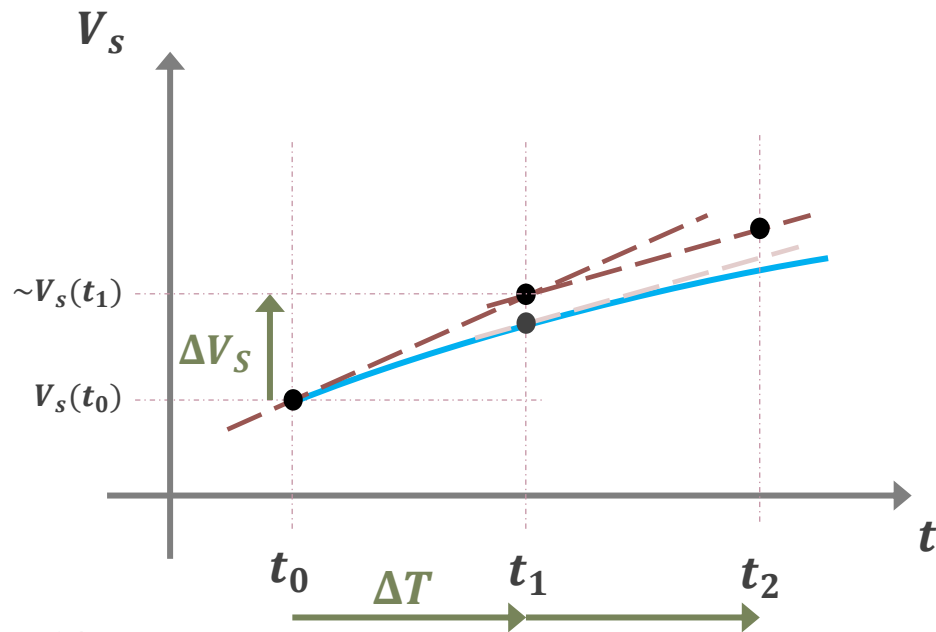
Coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point donné

$$V_s(t_1) \sim V_s(t_0) + \Delta T \cdot \left. \frac{dV_s}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Approche graphique



- Intégration numérique



$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

Coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point donné

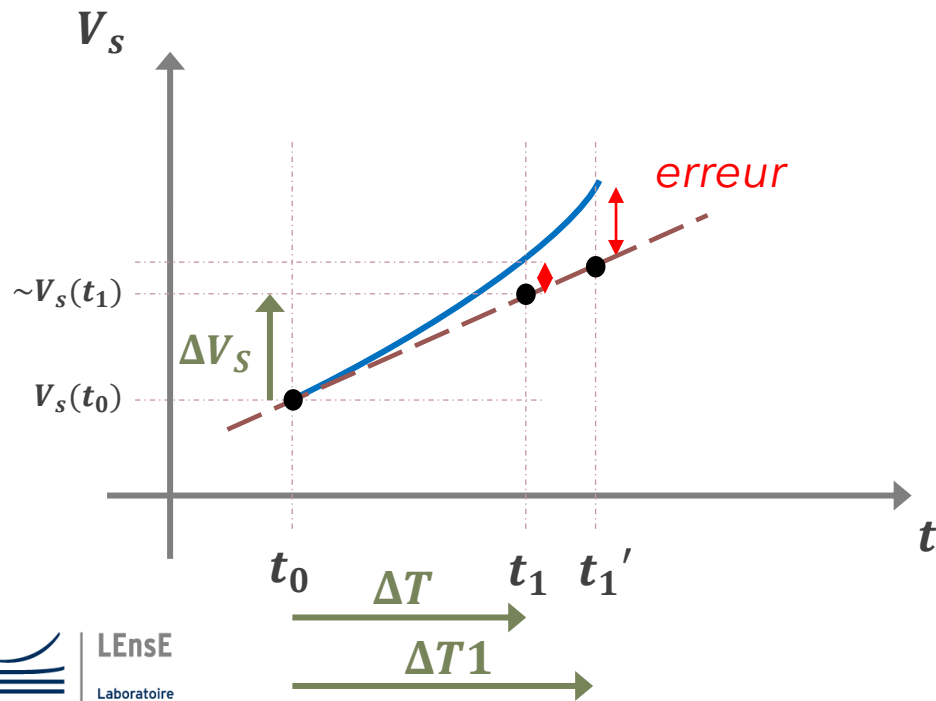
$$V_s(t_1) \sim V_s(t_0) + \Delta T \cdot \left. \frac{dV_s}{dt} \right|_{t=t_0}$$

$$V_s(t_2) \sim V_s(t_1) + \Delta T \cdot \left. \frac{dV_s}{dt} \right|_{t=t_1}$$

Approche graphique



- Méthode d'**Euler** (explicite)



$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

Coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point donné

$$V_s(t_{n+1}) \sim V_s(t_n) + \Delta T \cdot \left. \frac{dV_s}{dt} \right|_{t=t_n}$$



**APPROXIMATION
NUMERIQUE**

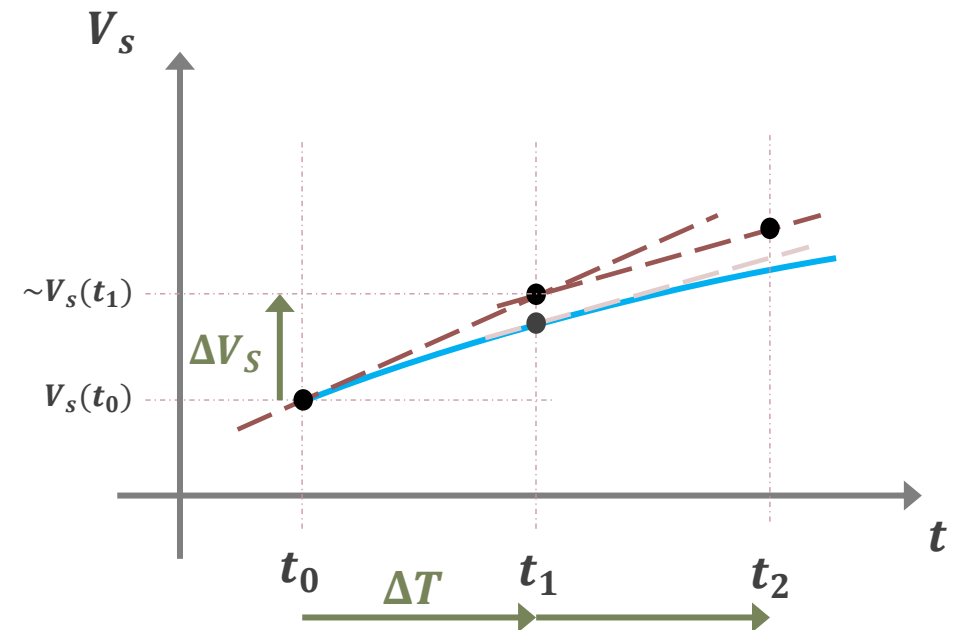
Intégration Numérique

- Intégration Numérique

Calculer des **valeurs approchées** d'une fonction **$y(t)$**

sur un intervalle de $[t_0, n \cdot \Delta T]$ de **t**

en connaissant sa **dérivée** et un point particulier de la fonction



Implémentation de la méthode d'Euler

- Données d'entrée

$F(t, V_S(t))$: fonction qui définit l'équation différentielle

$V_S(t_0)$: condition initiale

N et ΔT : le nombre de points souhaités et le pas de calcul d'intégration

ou T_{total} et ΔT

- Algorithme de calcul

$$t_{n+1} = t_n + \Delta T$$

$$V_S(t_{n+1}) \sim V_S(t_n) + \Delta T \cdot F(t_n, V_S(t_n))$$

Implémentation de la méthode d'Euler

S'ENTRAINER

- Résolution par intégration

$$\rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$



+ Définir la fonction $F(V_S(t_n), t_n)$

+ Implémenter l'algorithme de la méthode d'Euler explicite dans une fonction prenant comme paramètres : $F, V_S(0), T_{total}, N, R, C$

+ Tracer l'évolution en fonction du temps pour $R = 100 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ et au moins 3 valeurs de ΔT différentes (pour un temps total équivalent)

$$V_s(t_{n+1}) \sim V_s(t_n) + \Delta T \cdot F(V_S(t_n), t_n)$$

Implémentation de la méthode d'Euler

CORRECTION

- Définition de la fonction F

```
def F(t, Vs, R=1e5, C=1e-6):  
    return -Vs/(R*C)
```

- Implémentation Euler

```
def explicit_euler(F, Vs0, Ttot, N, R=1e5, C=1e-6):  
    dt = Ttot/N  
    t = numpy.zeros(N+1)  
    Vs = numpy.zeros(N+1)  
    Vs[0] = Vs0  
  
    for n in range(N):  
        t[n+1] = t[n] + dt  
        Vs[n+1] = Vs[n] + F(t[n], Vs[n], R, C)*dt  
  
    return t, Vs
```

Implémentation de la méthode d'Euler

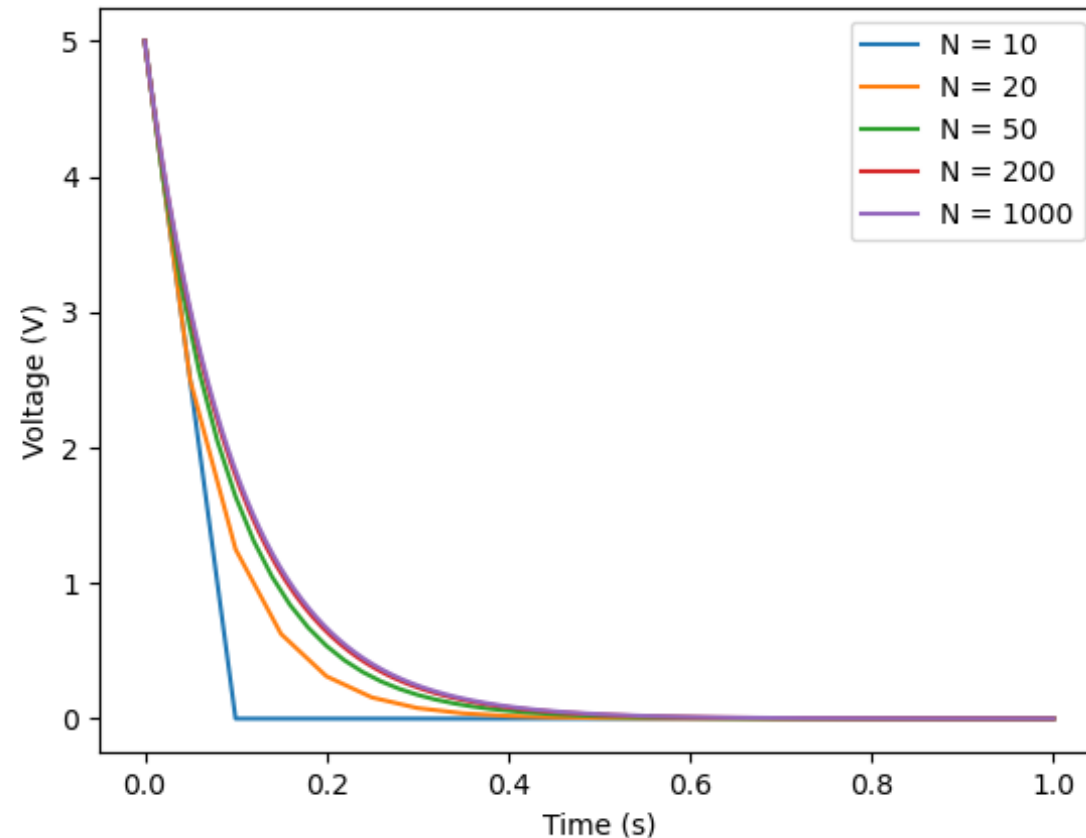
RESULTATS

- Simulation paramétrique

```
N_val = [10, 20, 50, 200, 1000]
plt.figure()
for k in range(len(N_val)):
    t, Vs = explicit_euler(F, 5, 1, N_val[k])
    plt.plot(t, Vs, label=f'N = {N_val[k]}')

plt.legend()
plt.show()
```

Discharge of a capacitor into a resistance - Explicit Euler Method



Implémentation de la méthode d'Euler

RESULTATS

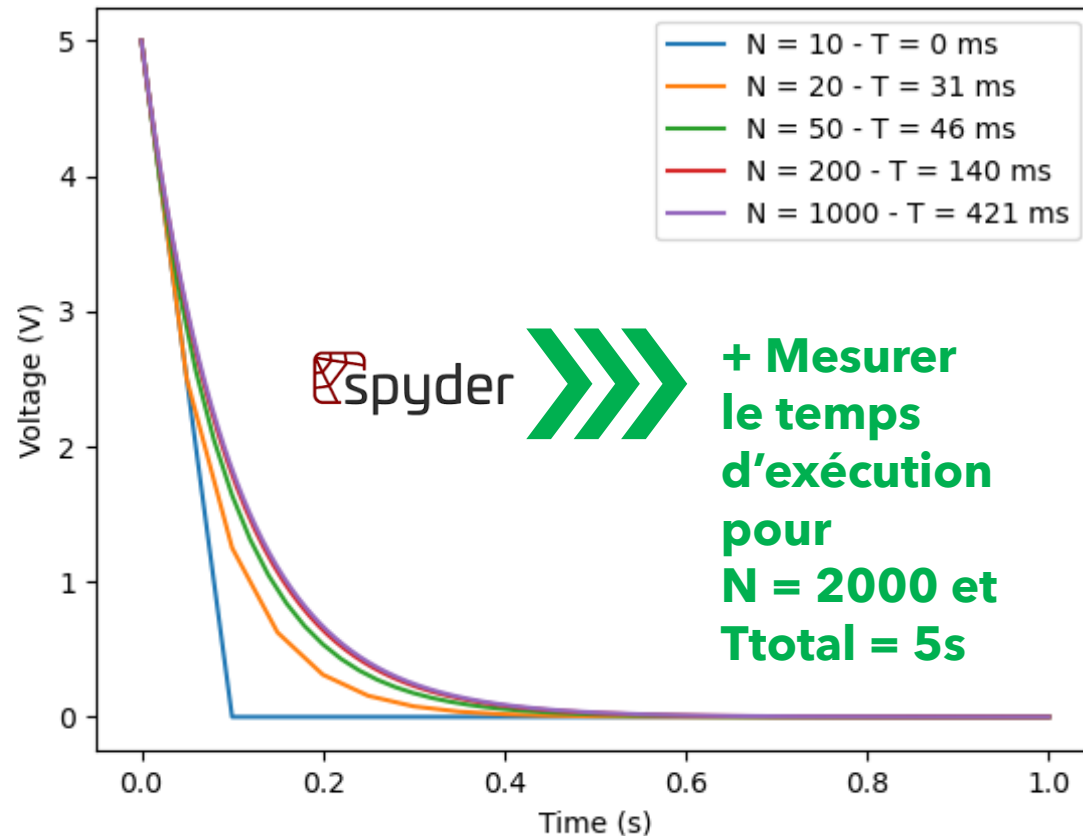
- Temps de calcul vs N

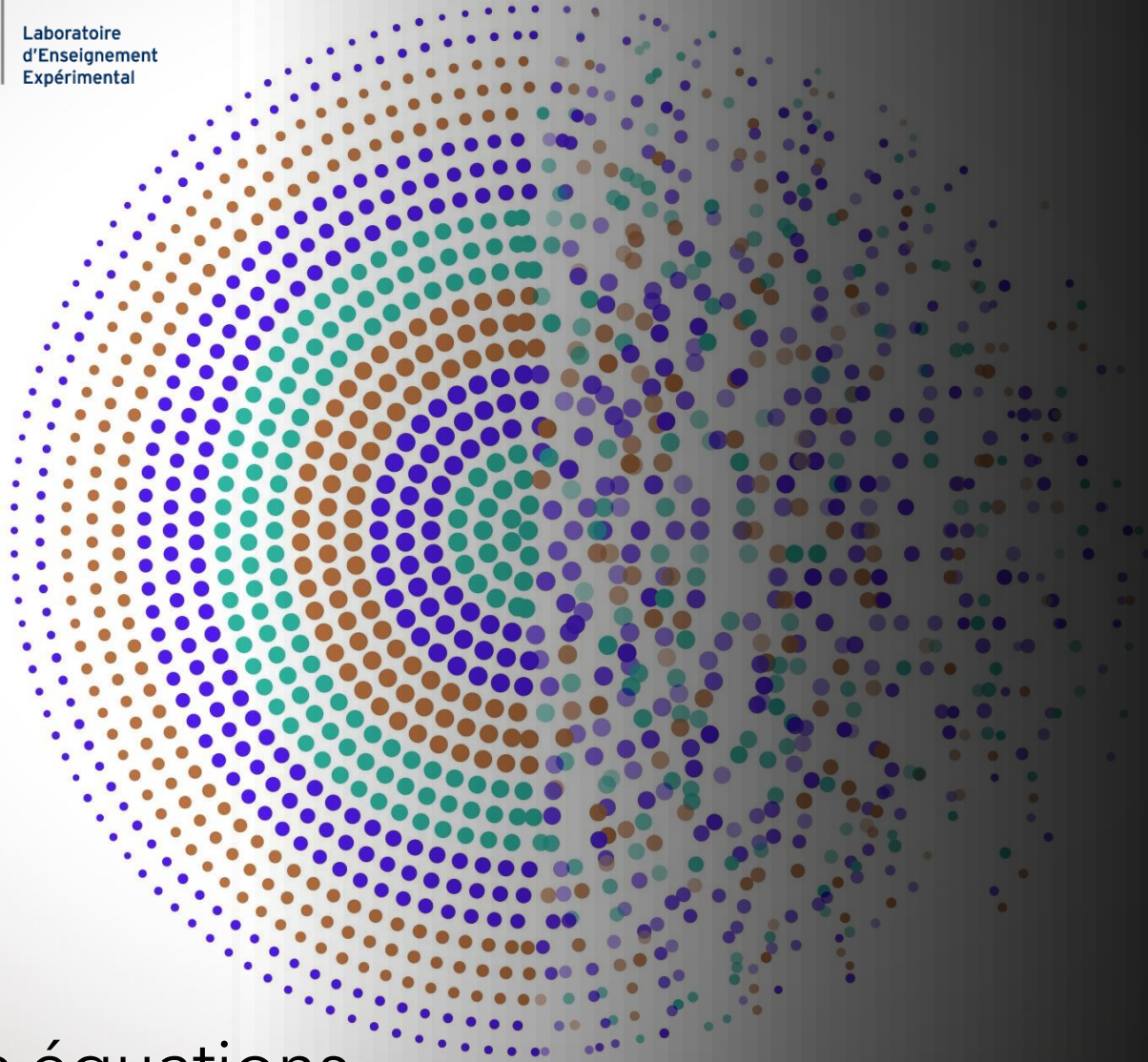
```
import time
```

```
st = time.process_time()  
[ bloc d'instructions à évaluer ]  
et = time.process_time()
```

```
vt = int((et-st) * 1e3)  
print(f'Execution Time = {vt} ms')
```

Discharge of a capacitor into a resistance - Explicit Euler Method





Intégration Numérique (Scipy)

Outils Numériques / Semestre 5
/ Institut d'Optique / B1_4

Cas des équations
différentielles

Scientific Python / SciPy



SciPy

- Boite à outils pour les sciences

SciPy User Guide

Introduction

Special functions (`scipy.special`)

Integration (`scipy.integrate`)

Optimization (`scipy.optimize`)

Interpolation (`scipy.interpolate`)

Fourier Transforms (`scipy.fft`)

Signal Processing (`scipy.signal`)

Linear Algebra (`scipy.linalg`)

Sparse eigenvalue problems with ARPACK

Compressed Sparse Graph Routines (`scipy.sparse.csgraph`)

Spatial data structures and algorithms (`scipy.spatial`)

Statistics (`scipy.stats`)

Multidimensional image processing (`scipy.ndimage`)

File IO (`scipy.io`)

Intégration Numérique / SciPy

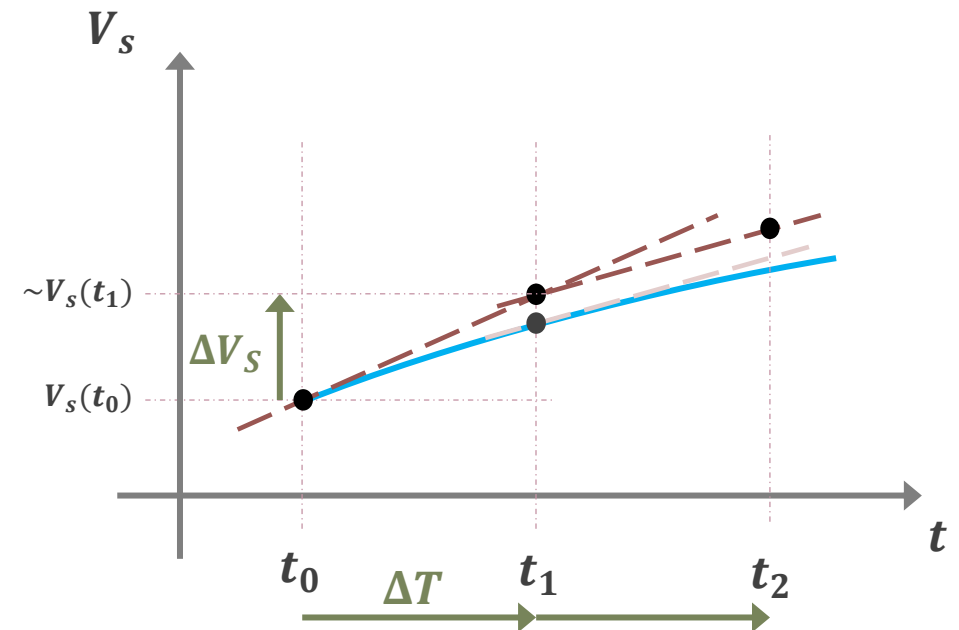


- Intégration Numérique

Calculer des **valeurs approchées** d'une fonction **$y(t)$**

sur un intervalle de $[t_0, n \cdot \Delta T]$ de **t**

en connaissant sa **dérivée** et un point particulier de la fonction



Intégration Numérique / SciPy

S'ENTRAINER

- Résolution par intégration

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

```
scipy.integrate.solve_ivp(F, [t0, T_final], [Vs(t0)])
```

*Cette fonction retourne des données encapsulées sous la forme de deux vecteurs : **t** et **y**
y doit être transposé pour pouvoir être affiché par rapport à **t***

```
sol = scipy.integrate.solve_ivp(F, [0,1], [5])  
# résolution entre t = 0 et t = 1, pour Vs(0) = 5
```

```
time = sol.t  
Vs_t = sol.y.flat
```

Intégration Numérique / SciPy

S'ENTRAINER

- Résolution par intégration / Arguments

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$

```
scipy.integrate.solve_ivp(F, [t0, T_final], [V_s(t0)], args = [R, C])
```

Passage d'arguments à la fonction F par l'intermédiaire de solve_ivp

```
def F(t, Vs, R=1e5, C=1e-6):  
    return -Vs/(R*C)
```

Intégration Numérique / SciPy

S'ENTRAINER

- Résolution par intégration

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot V_s$$



+ Comparer la méthode d'Euler explicite et la méthode `solve_ivp` implémentée dans `Scipy.integrate`

- sur la décharge d'un condensateur
- sur le régime forcé d'un filtre RC avec une entrée sinusoïdale

```
scipy.integrate.solve_ivp( F , [t0, T_final] , [Vs(t0)] )
```

*Cette fonction retourne des données encapsulées sous la forme de deux vecteurs : **t** et **Vs***
Vs doit être transposé pour pouvoir être affiché par rapport à **t**

D'autres méthodes plus optimisées

- Méthodes de Runge-Kutta

Méthode d'Euler → tangente en un point pour trouver le suivant

Méthodes de Runge Kutta

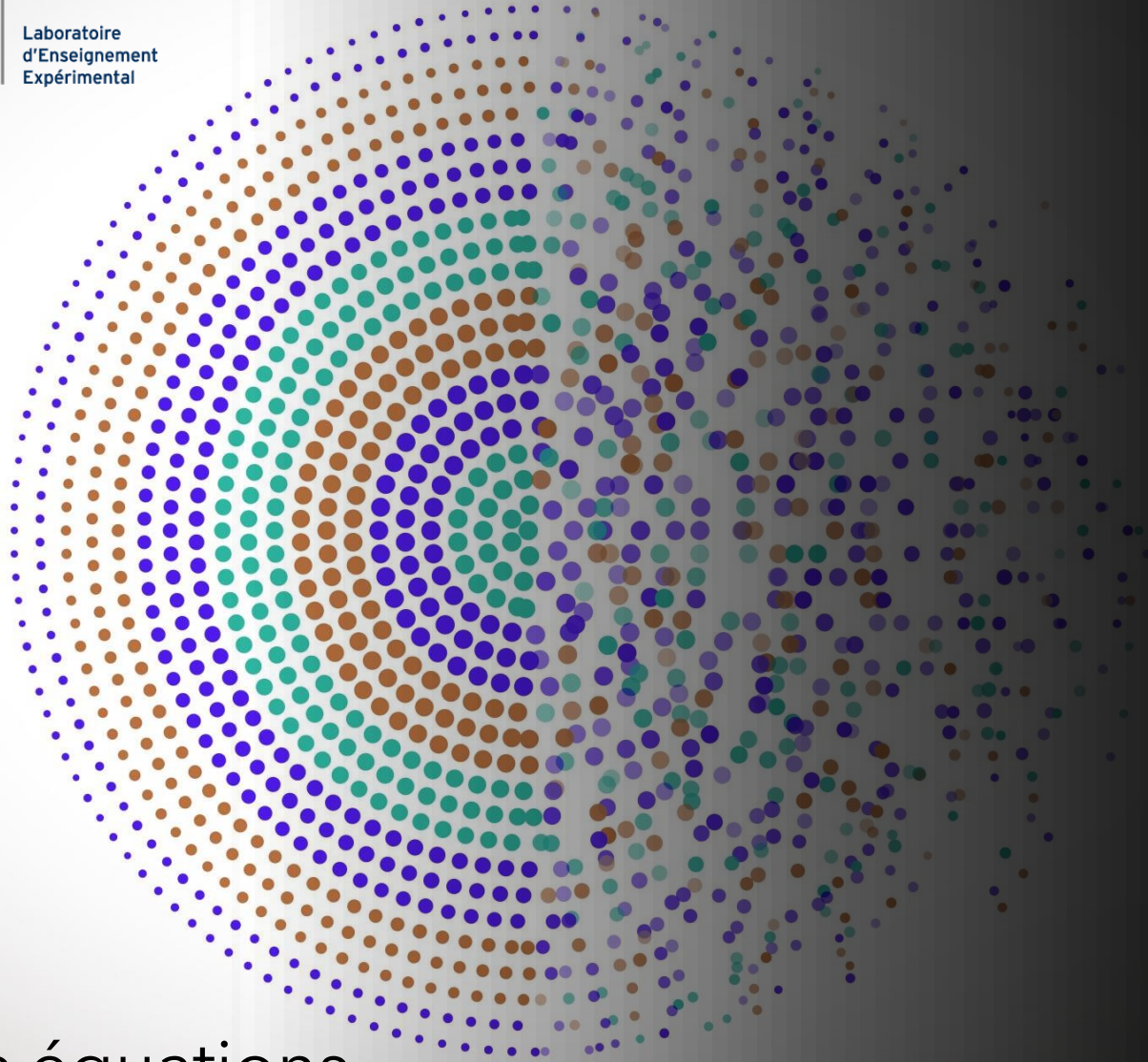
(ordre 2) → création d'un point intermédiaire entre deux points expérimentaux

(ordre 4) → création de 3 points intermédiaires

Par défaut / RK45

```
scipy.integrate.solve_ivp( ... , method='RK23')
```

```
scipy.integrate.solve_ivp( ... , method='RK45')
```



Cas des équations
différentielles

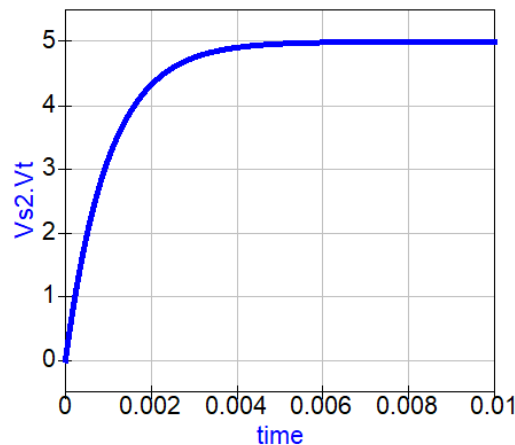
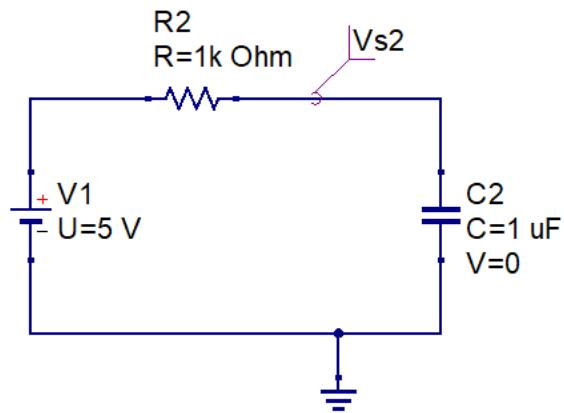
Intégration Numérique

Régime forcé

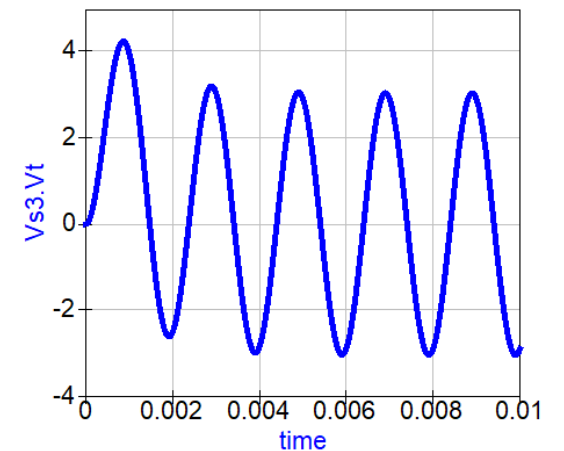
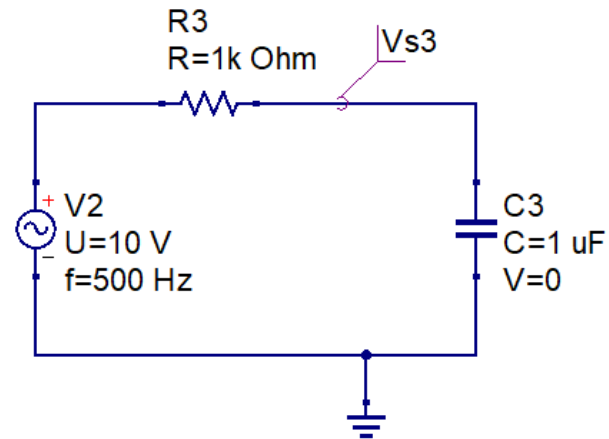
Outils Numériques / Semestre 5
/ Institut d'Optique / B1_4

Circuits similaires / Généralisation

- Réponse à un échelon



- Régime forcé



$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot (V_s - V_e)$$

Implémentation de la méthode d'Euler

OPTIMISATION

- Limite

$F(V_S(t), t, R, C, \mathbf{V}e(t))$: fonction qui définit l'équation différentielle

$V_S(t_0)$: condition initiale

N et T_{total} : le nombre de points souhaités et le temps total

Comment rendre paramétrable R et C ?

Comment rendre dépendant F de $\mathbf{V}e(t)$?

Intégration Numérique / SciPy

S'ENTRAINER

- Résolution par intégration

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot (V_s - V_e)$$



- + Créer une nouvelle fonction F_{sin} qui prendra comme paramètres une amplitude et une fréquence
- + Créer une nouvelle fonction $F2$ qui permet de prendre en compte le régime forcé pour V_e
- + Afficher le signal $V_s(t)$ pour différentes valeurs du nombre de points N

```
scipy.integrate.solve_ivp( F , [t_0, T_final] , [V_s(t_0)] )
```

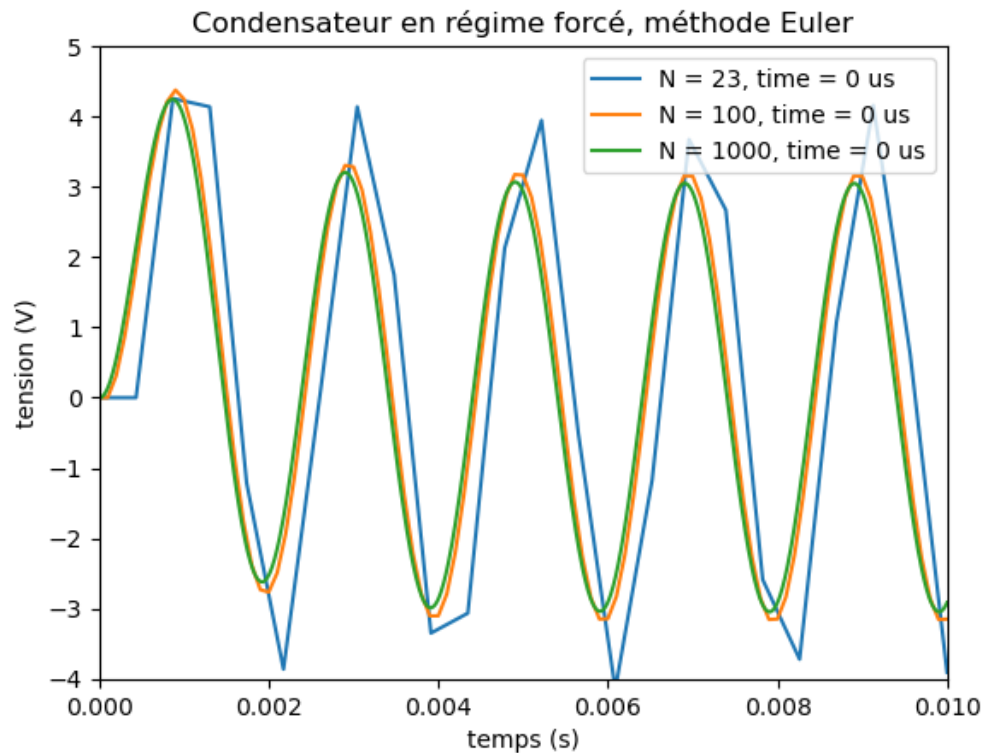
Cette fonction retourne des données encapsulées sous la forme de deux vecteurs : \mathbf{t} et \mathbf{Vs}
 \mathbf{Vs} doit être transposé pour pouvoir être affiché par rapport à \mathbf{t}

Intégration Numérique / SciPy

S'ENTRAINER

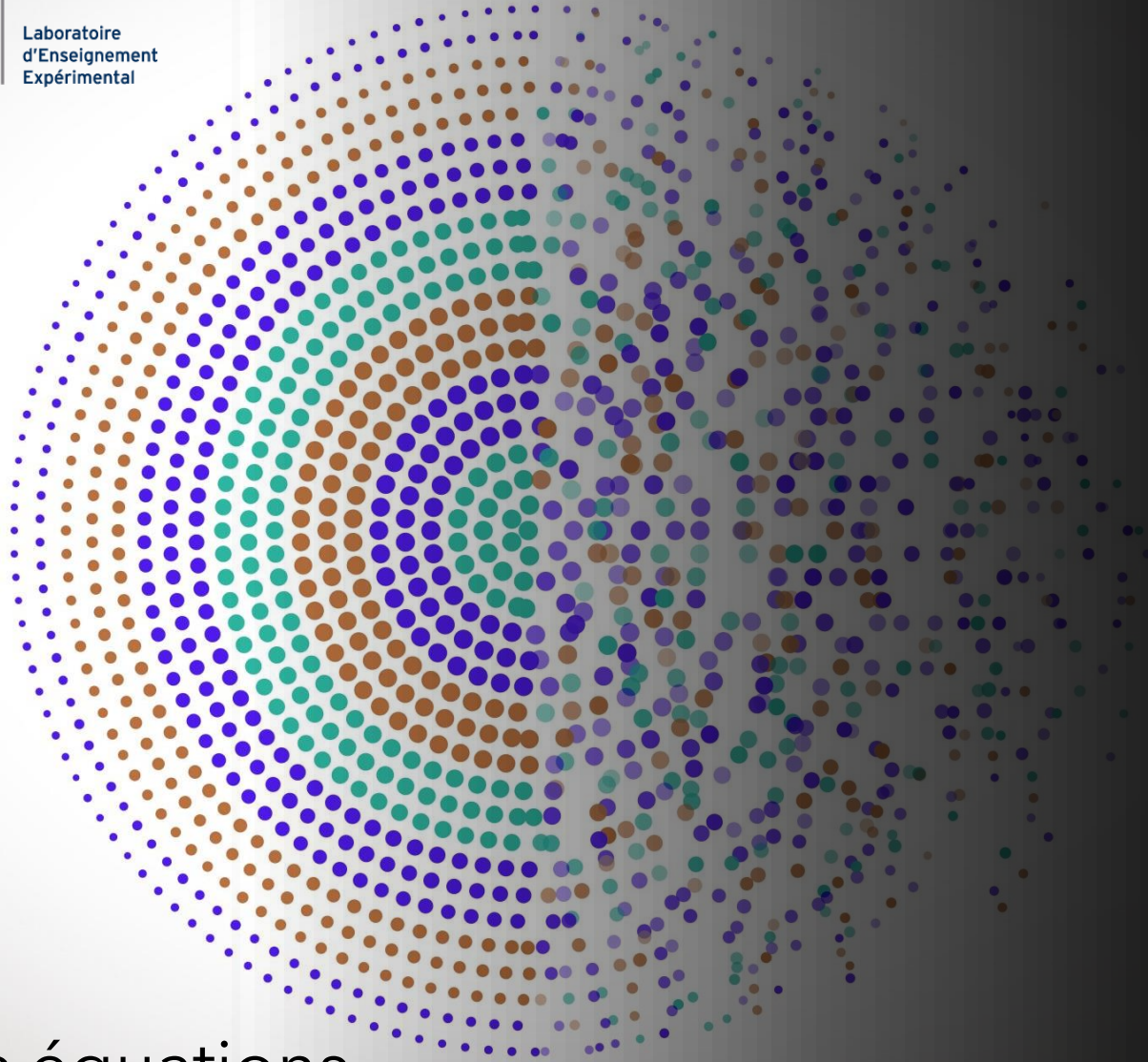
- Résultats

$$\frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_1} \cdot (V_s - V_e)$$



Résultats obtenus avec **`solve_ivp`**
pour les valeurs suivantes :

$R = 1e3 \Omega$
 $C = 1e-6 \text{ F}$
 $V_{e0} = 10\text{V}$
 $f_0 = 500 \text{ Hz}$



Cas des équations
différentielles

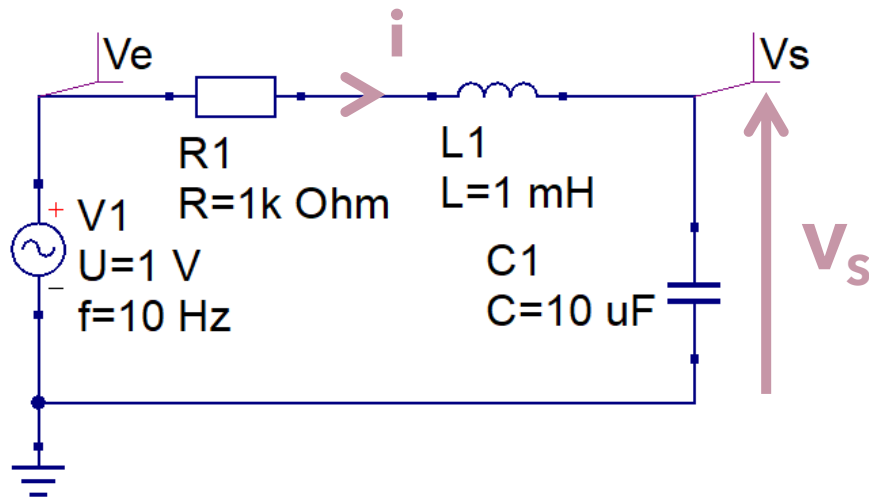
Intégration Numérique

Second ordre

Outils Numériques / Semestre 5
/ Institut d'Optique / B1_4

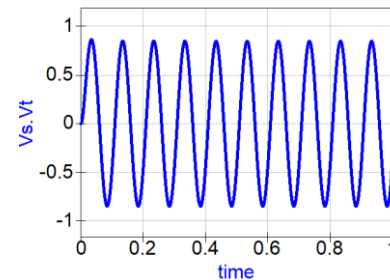
Autre cas / Equation du second ordre

- Circuit RLC



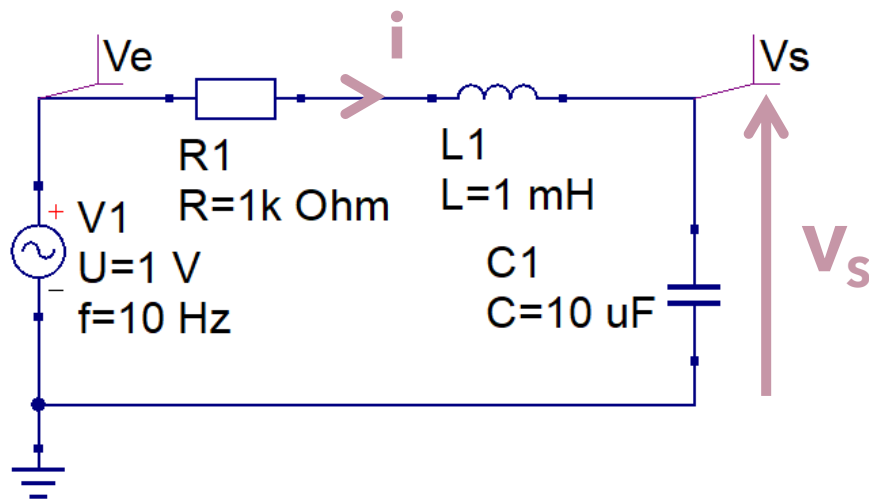
$$V_e = L_1 \cdot C_1 \cdot \frac{d^2 V_s}{dt^2} + R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{d V_s}{dt} + V_s$$

Equation différentielle d'ordre 2



Autre cas / Equation du second ordre

- Circuit RLC

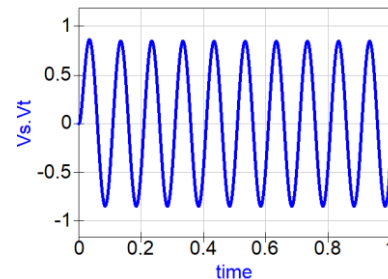


$$V_e = L_1 \cdot C_1 \cdot \frac{d^2 V_s}{dt^2} + R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{d V_s}{dt} + V_s$$

Equation différentielle d'ordre 2



solve_ivp uniquement pour **ordre 1**



Cas d'une équation différentielle d'ordre 2

- Approche analytique



$$V_e = L_1 \cdot C_1 \cdot \frac{d^2 V_s}{dt^2} + R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{d V_s}{dt} + V_s$$

*Système de deux équations
différentielles d'ordre 1*



$$\frac{d^2 V_s}{dt^2} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{d V_s}{dt} - \frac{1}{L_1 \cdot C_1} (V_s - V_e)$$

$$\frac{d V_s}{dt} = u$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} \cdot u - \frac{1}{L_1 \cdot C_1} (V_s - V_e)$$

Cas d'une équation différentielle d'ordre 2

- Méthode d'Euler
forme matricielle

Posons :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} V_s \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} u \\ F(t, u) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$$

Ainsi :

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta T \cdot \mathbf{F}(t_n, \mathbf{y}_n)$$

Systeme de deux équations
différentielles d'ordre 1

$$F(t, u) = -\frac{R_1}{L_1} \cdot u - \frac{1}{L_1 \cdot C_1} (V_s - V_e)$$



$$\frac{dV_s}{dt} = u$$

$$\frac{du}{dt} = F(t, u)$$

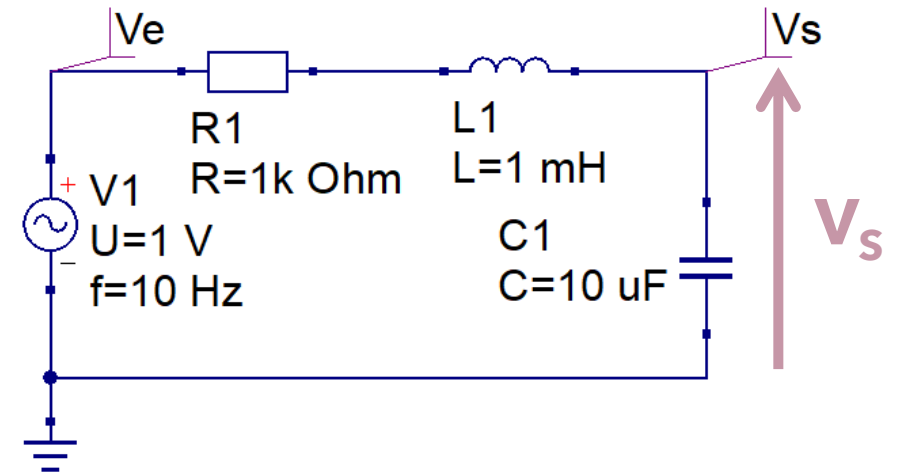
Intégration Numérique / SciPy

ALLER PLUS LOIN

- Résolution par intégration



+ Tracer l'évolution de $V_s(t)$ dans un circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale de fréquence 20 Hz, avec $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ et $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$



```
scipy.integrate.solve_ivp( F , [t0, Tfinal] , [y(t0), y'(t0)] )
```

Cette fonction retourne des données encapsulées sous la forme de deux vecteurs : \mathbf{t} et \mathbf{y}
 \mathbf{y} doit être transposé pour pouvoir être affiché par rapport à \mathbf{t}

Bibliographie

Document rédigé par Julien VILLEMEJANE
LEnsE / Institut d'Optique / France

<http://lense.institutoptique.fr/>

Création : Avril 2023

- **Intégration des équations différentielles : méthode d'Euler** - Frédéric LEGRAND
<https://www.f-legrand.fr/scidoc/srcdoc/numerique/euler/eulers/eulers-pdf.pdf>
- **Introduction à la méthode d'Euler en python** - Physique TSI1 Troyes
<https://www.youtube.com/watch?v=-d7qrNkPDtQ>
- **Cours d'introduction à l'analyse numérique** - Femto-Physique
<https://femto-physique.fr/analyse-numerique/euler.php>