

Régime harmonique

Outils Numériques / Semestre 5
/ Institut d'Optique / B1_4

Cas des équations
différentielles

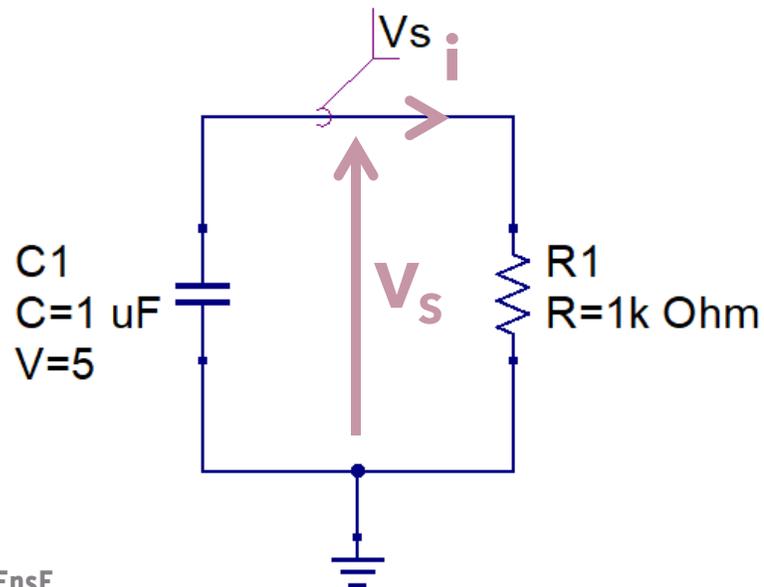
Approche analytique



- Approche analytique

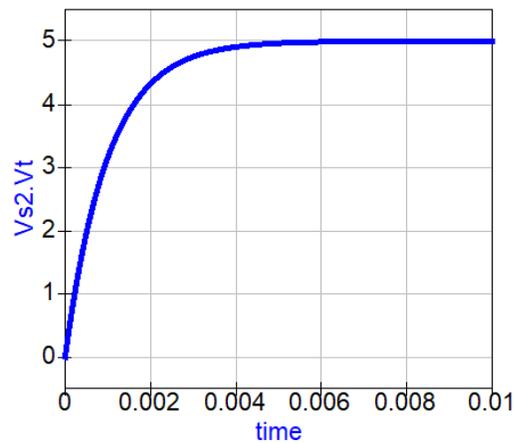
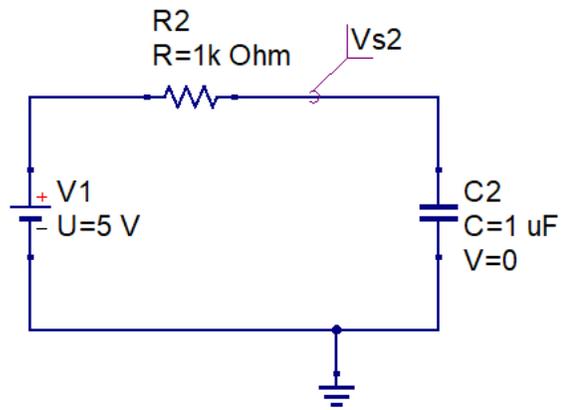
$$\rightarrow V_s = -R_1 \cdot C_1 \cdot \frac{dV_s}{dt}$$

Equation différentielle d'ordre 1

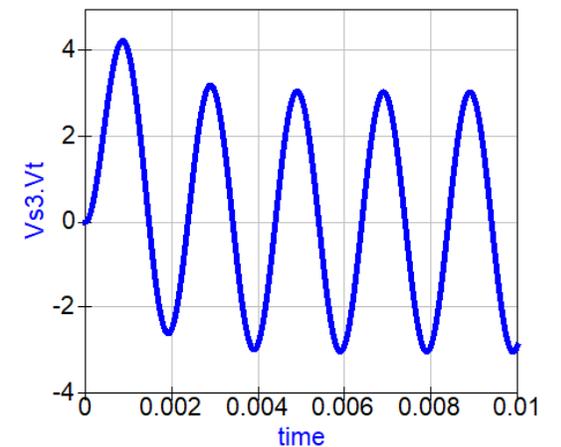
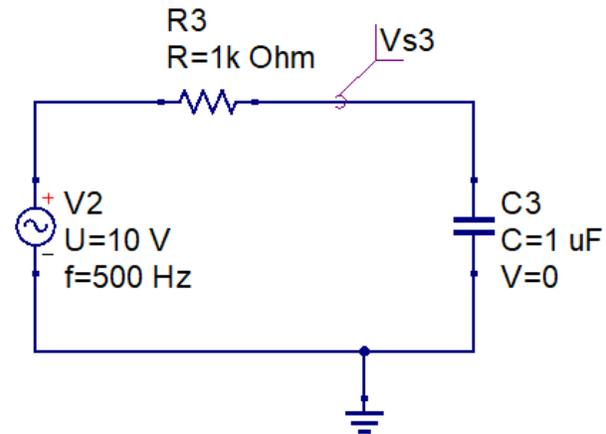


Circuits similaires / Ordre 1

- Réponse à un échelon

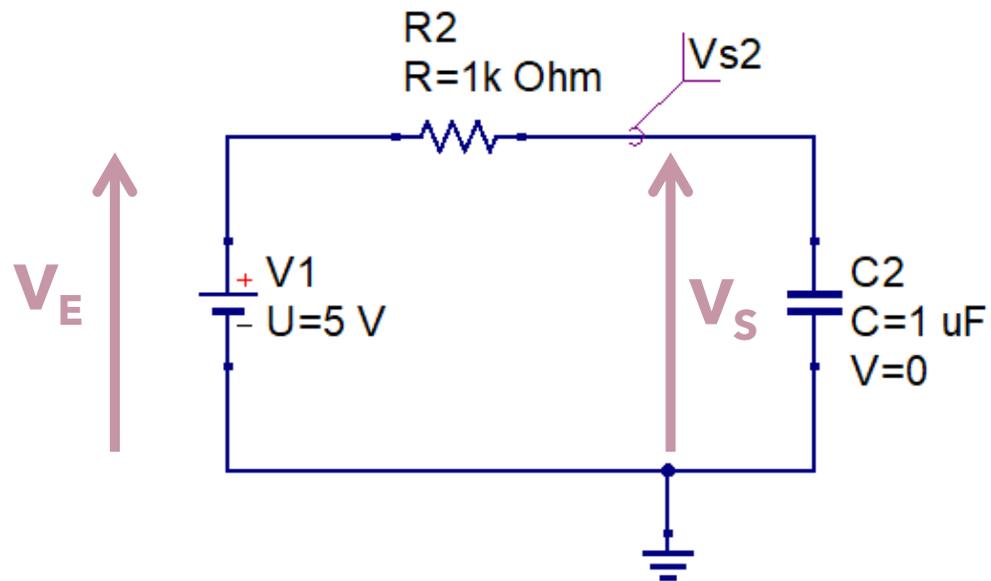


- Régime forcé



Systeme linéaire d'ordre 1

- Filtre RC



- Fonction de transfert

Comportement fréquentiel

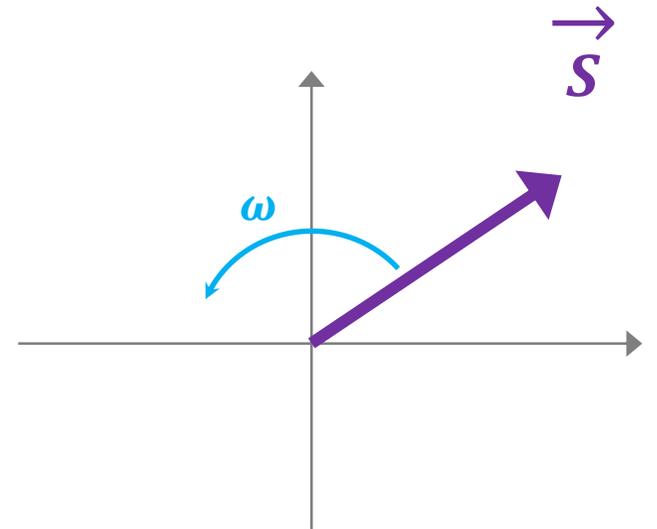
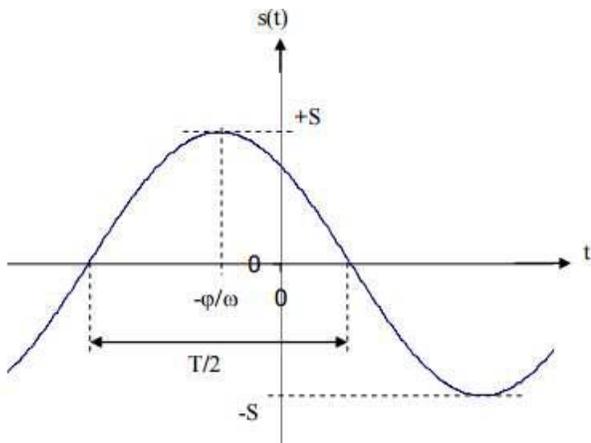
$$H(p) = \frac{V_S}{V_E}$$

Régime harmonique

- Système linéaire et invariant

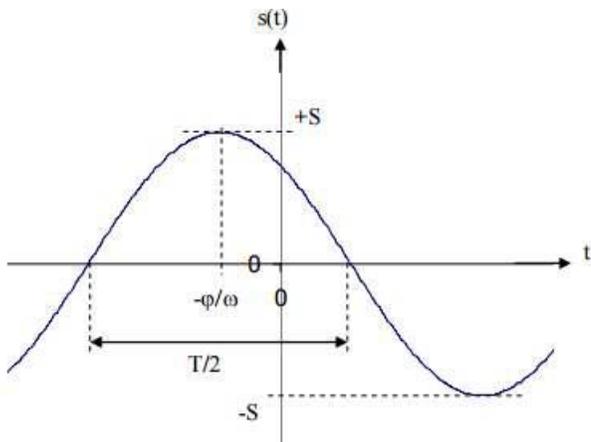
Toutes les grandeurs physiques évoluent à la **même pulsation** !

$$s(t) = S \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



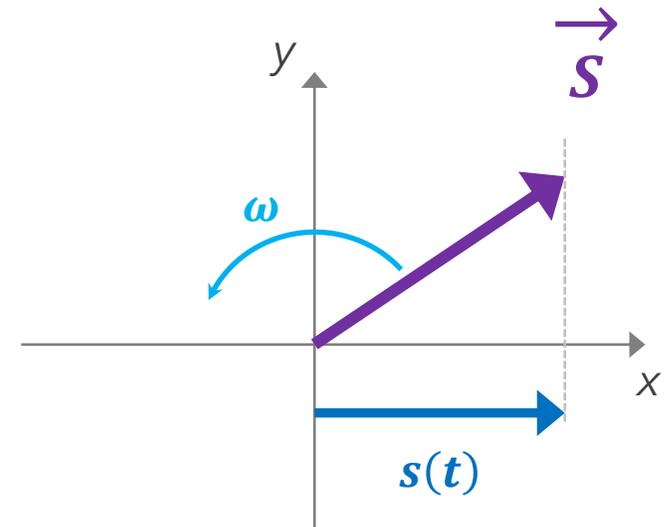
Régime harmonique

- Système linéaire et invariant
- Représentation de Fresnel



Toutes les grandeurs physiques évoluent à la **même pulsation** !

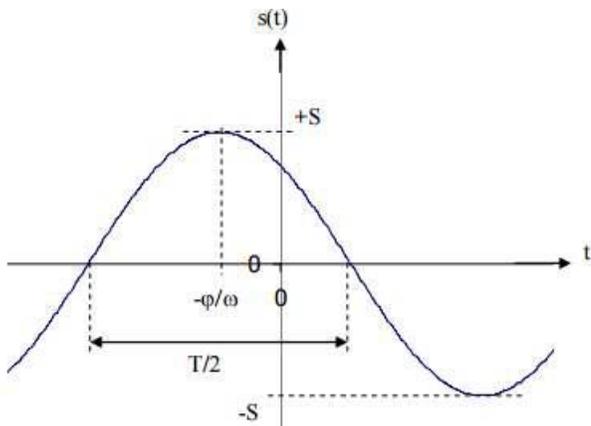
$$s(t) = S \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



Régime harmonique

- Représentation complexe

- Représentation de Fresnel

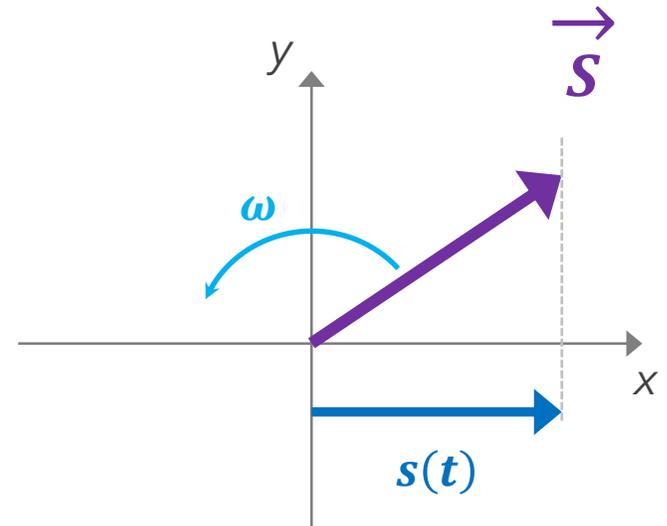


$$S(t) = S \cdot e^{-i(\omega.t + \varphi)}$$

$$S(t) = S \cdot e^{-i\varphi} e^{-i\omega.t}$$

$$s(t) = \Re(S(t))$$

Grandeur complexe



Régime harmonique

- Représentation complexe

Système linéaire et invariant
Toutes les grandeurs physiques
*évoluent à la **même pulsation** !*

$$S(t) = S \cdot e^{-i\varphi} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

Grandeur complexe

$$v(t) = V \cdot e^{-i\varphi_1} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$i(t) = I \cdot e^{-i\varphi_2} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$\Rightarrow \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V \cdot e^{-i\varphi_1}}{I \cdot e^{-i\varphi_2}}$$

Régime harmonique

- Impédance complexe

$$Z_R = R$$

$$Z_C = \frac{1}{C \cdot p}$$

$$Z_L = L \cdot p$$

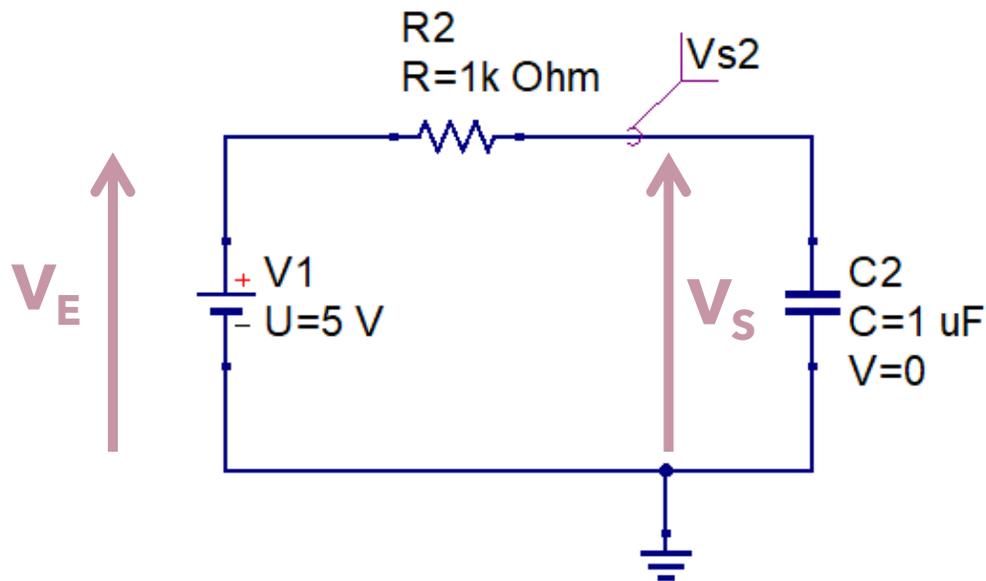
$$v(t) = V \cdot e^{-i\varphi_1} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$i(t) = I \cdot e^{-i\varphi_2} \cdot e^{-i\omega \cdot t}$$

$$\rightarrow \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V \cdot e^{-i\varphi_1}}{I \cdot e^{-i\varphi_2}}$$

Systeme linéaire d'ordre 1

- Filtre RC

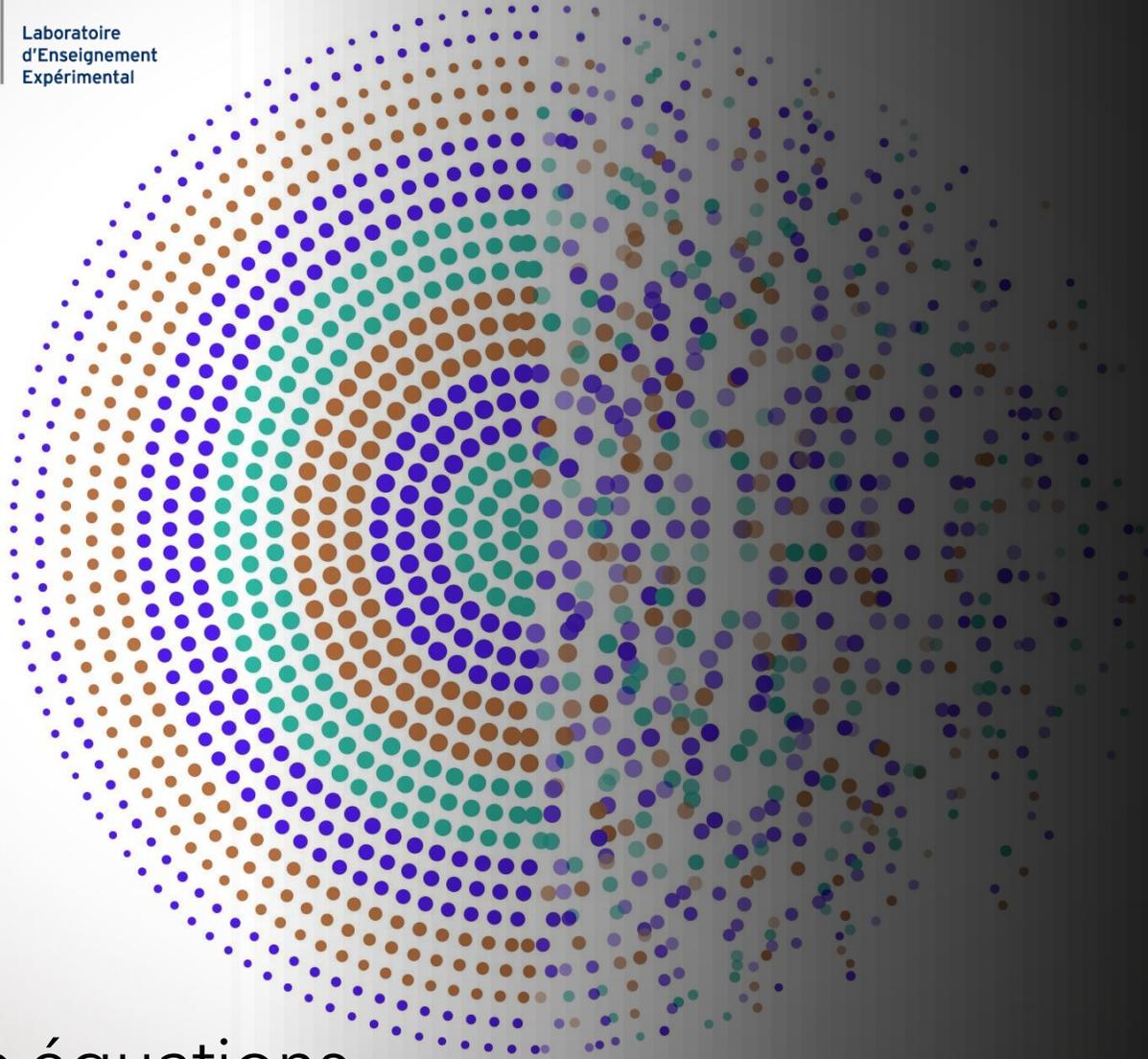


- Fonction de transfert

Comportement fréquentiel

$$V_S = V_E \cdot \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

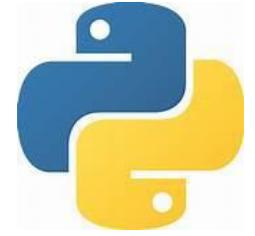


Approche Système (control)

Outils Numériques / Semestre 5
/ Institut d'Optique / B1_4

Cas des équations
différentielles

Installation d'un package



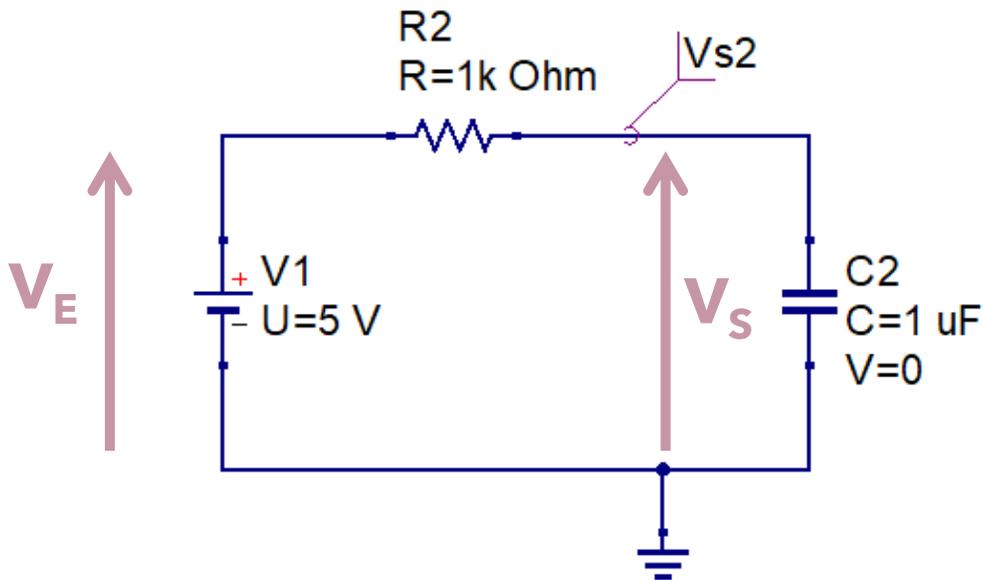
- Installation de bibliothèques / packages

Dans un shell/prompt

> pip install control

Analyse d'un système linéaire

- Filtre RC



- Fonction de transfert

Comportement fréquentiel

$$\rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

Réponse en fréquence

Réponse indicielle

Réponse impulsionnelle

control pour l'étude des systèmes

- Définition d'un système

```
import control as ct
```

```
num = np.array( [aN, ..., ak, ..., a0] )  
den = np.array( [bN, ..., bk, ..., b0] )
```

```
tf_sys = ct.tf( num, den )
```

- Fonction de transfert

Comportement fréquentiel

$$\rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{num(p)}{den(p)}$$

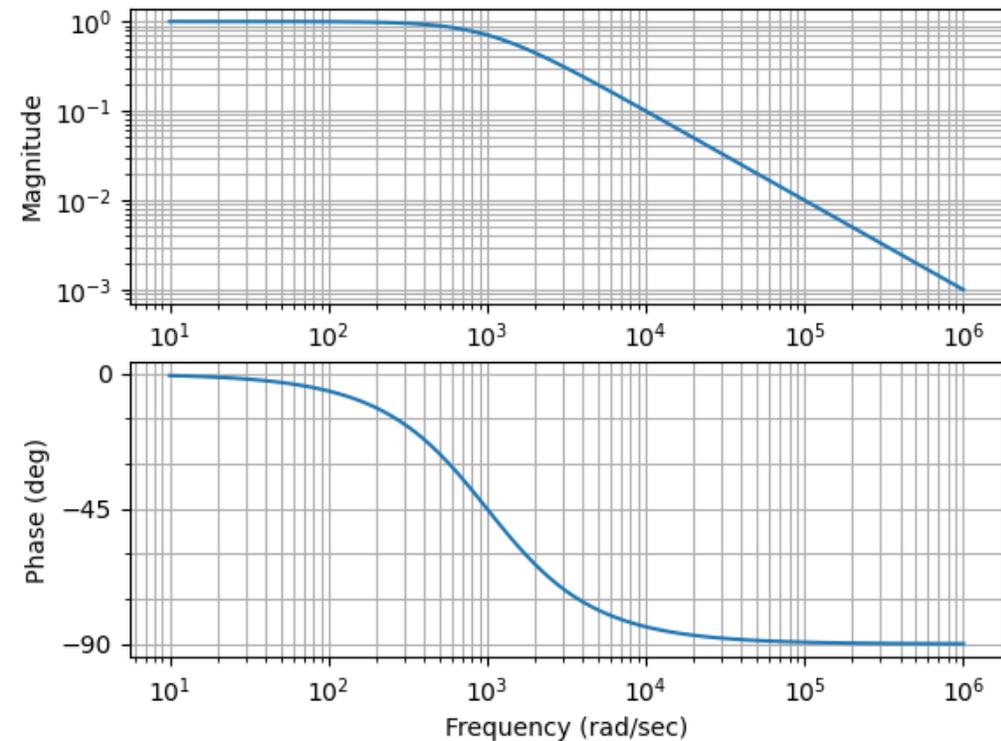
$$num(p) = \sum_{k=0}^N a_k p^k$$

$$den(p) = \sum_{k=0}^M b_k p^k$$

control pour l'étude des systèmes

- Réponse en fréquence

```
ct.bode_plot(tf_sys)
```



Réponse en fréquence / Filtre RC

S'ENTRAINER

- Comparaison



+ Définir le système par sa fonction de transfert

+ Tracer le diagramme de Bode pour :

- R = 1 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 10 μF

$$\rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

```
ct.bode_plot( sys , omega=w)
```

Réponse en fréquence / Filtre RC

OPTIMISATION

- Réponse en fréquence

```
w = np.logspace(start, stop, N)
```

```
mag, phase, w = ct.bode_plot(tf_sys, w,  
plot=False)
```

$$\rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$



start et **stop** sont des
numéros de décade

Réponse en fréquence / Filtre RC

S'ENTRAINER

- Comparaison

$$\rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$



+ Définir le système par sa fonction de transfert

+ Tracer sur le même diagramme la réponse en fréquence des systèmes suivants :

- R = 1 k Ω et C = 1 μ F
- R = 10 k Ω et C = 1 μ F
- R = 10 k Ω et C = 10 μ F

`ct.bode_plot(sys , omega=w, plot=False)`

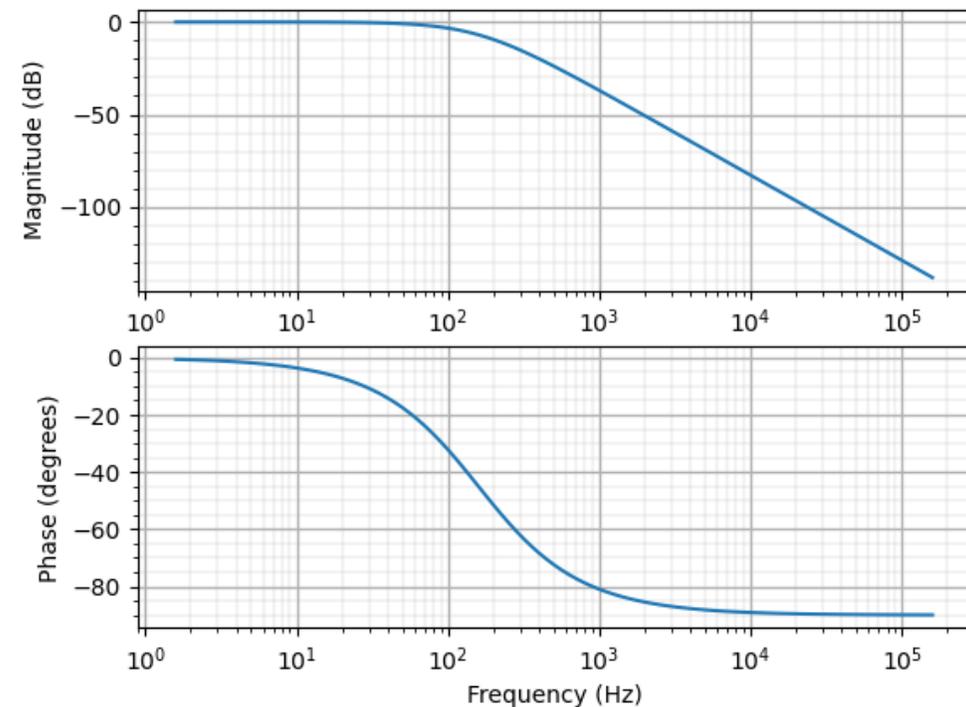
Réponse en fréquence / Filtre RC

OPTIMISATION

- Affichage Bode

```
fig, axs = plt.subplots(2, 1)
fig.suptitle('Frequency Response ')
axs[0].plot(f, mag_db)
axs[0].set_ylabel('Magnitude (dB)')
axs[0].set_xscale('log')
axs[0].grid(which="major", linewidth = 1)
axs[0].grid(which="minor", linewidth = 0.2)
axs[0].minorticks_on()
```

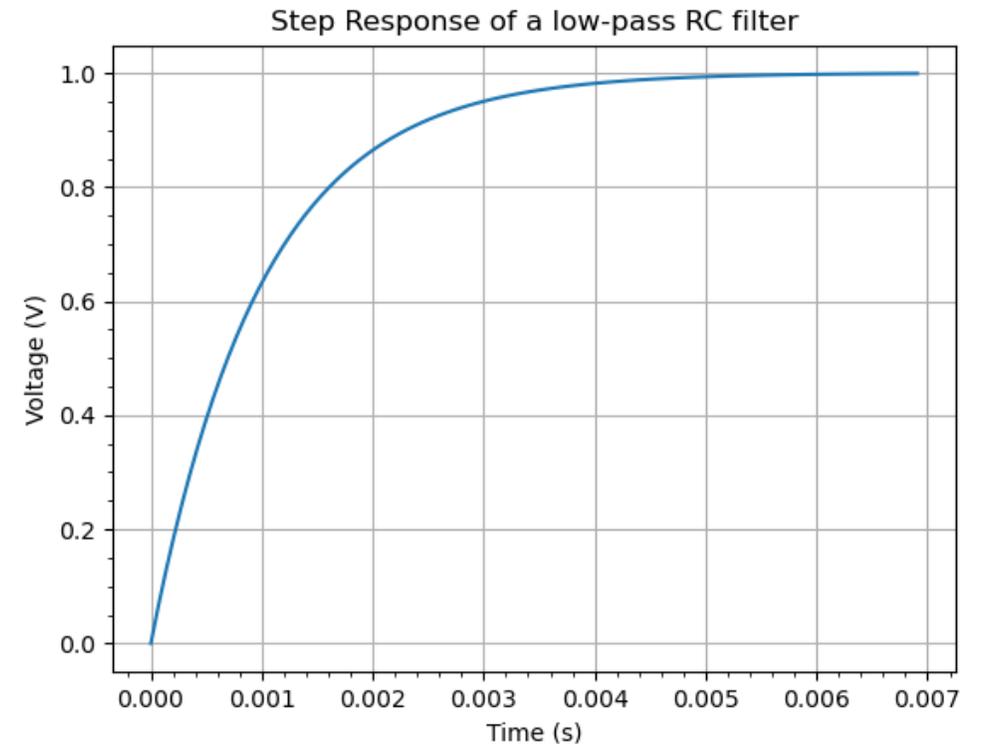
Frequency Response of a RC low-pass filter



control pour l'étude des systèmes

- Réponse indicielle

```
t, y = ct.step_response(tf_sys)
```



Réponse indicielle / Filtre RC

S'ENTRAINER

- Comparaison



+ Tracer sur le même diagramme la réponse indicielle des systèmes suivants :

- R = 1 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 1 μF
- R = 10 kΩ et C = 10 μF

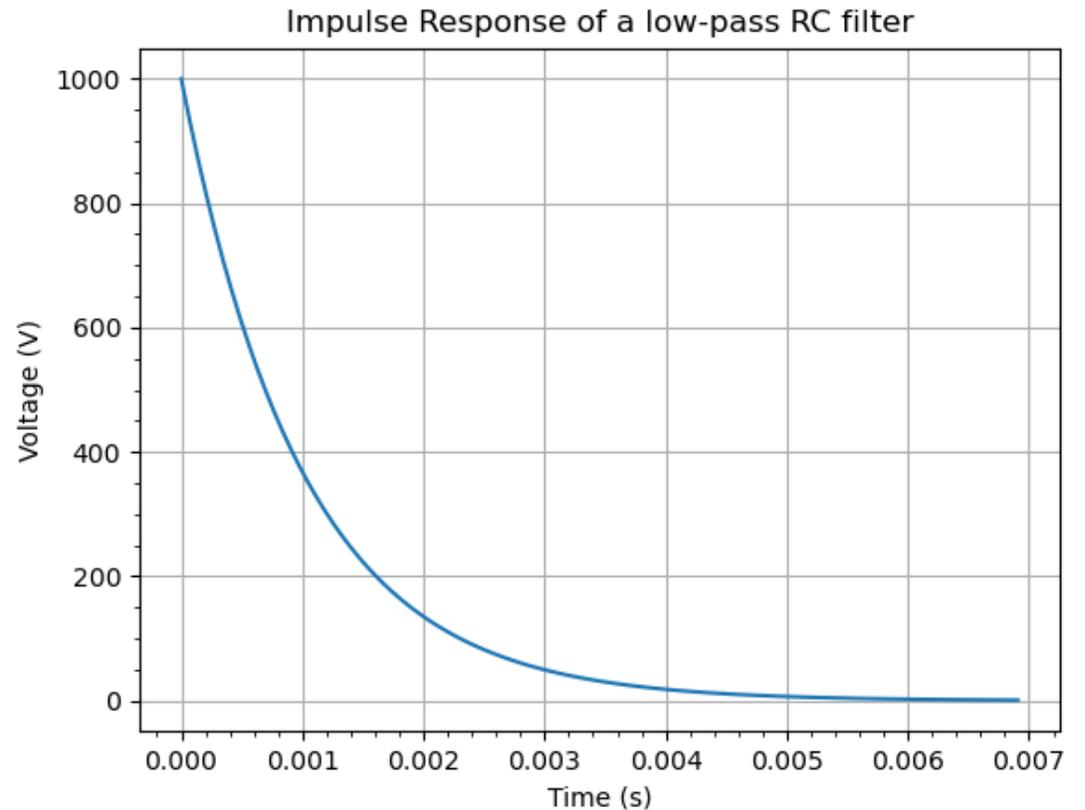
$$\rightarrow H(p) = \frac{V_S}{V_E} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot p}$$

`ct.step_response(sys , T=t)`

control pour l'étude des systèmes

- Réponse impulsionnelle

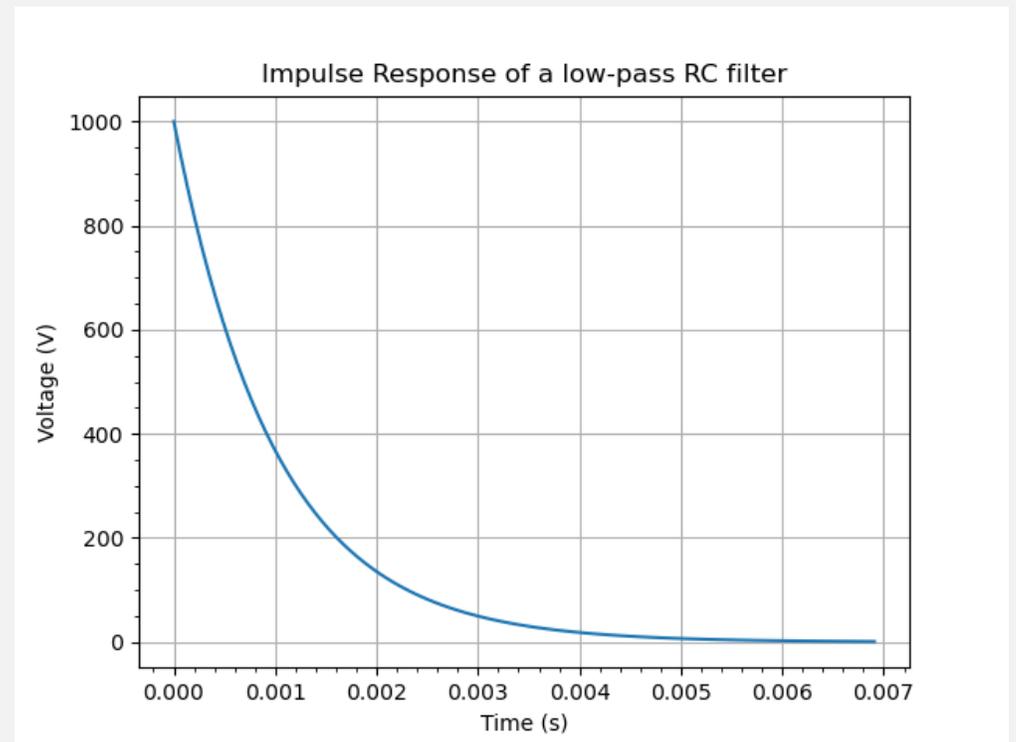
`t, y = ct.impulse_response(tf_sys, T=t)`



Un peu de maths...

- Lien entre réponse en fréquence et impulsion ?

```
t = np.linspace(0, 1, 1001)
t, y = ct.impulse_response(tf_sys, T=t)
```



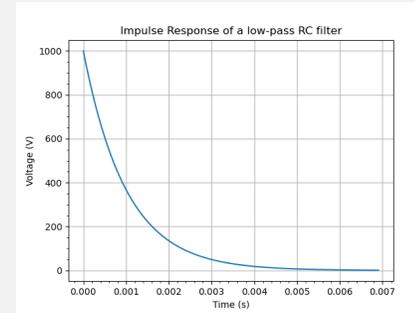
Un peu de maths...

- Lien entre réponse en fréquence et impulsion ?

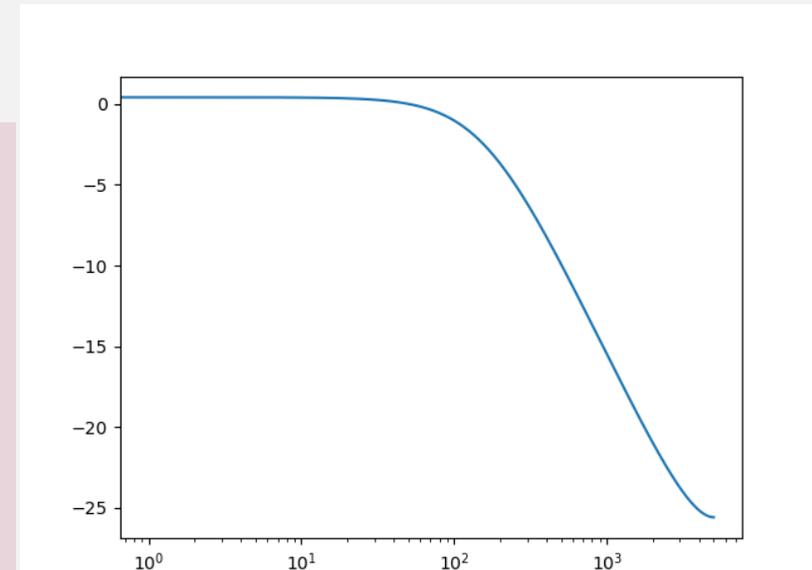
```
t = np.linspace(0, 1, 1001)
t, y = ct.impulse_response(tf_sys, T=t)
```

```
import scipy as sc
```

```
tf = sc.fft.fft(y)/len(y)
tf_half = tf[0:len(tf)//2]
plt.figure()
plt.plot(20*np.log10(np.abs(tf_half)))
plt.xscale('log')
plt.show()
```



**Transformée
de Fourier**

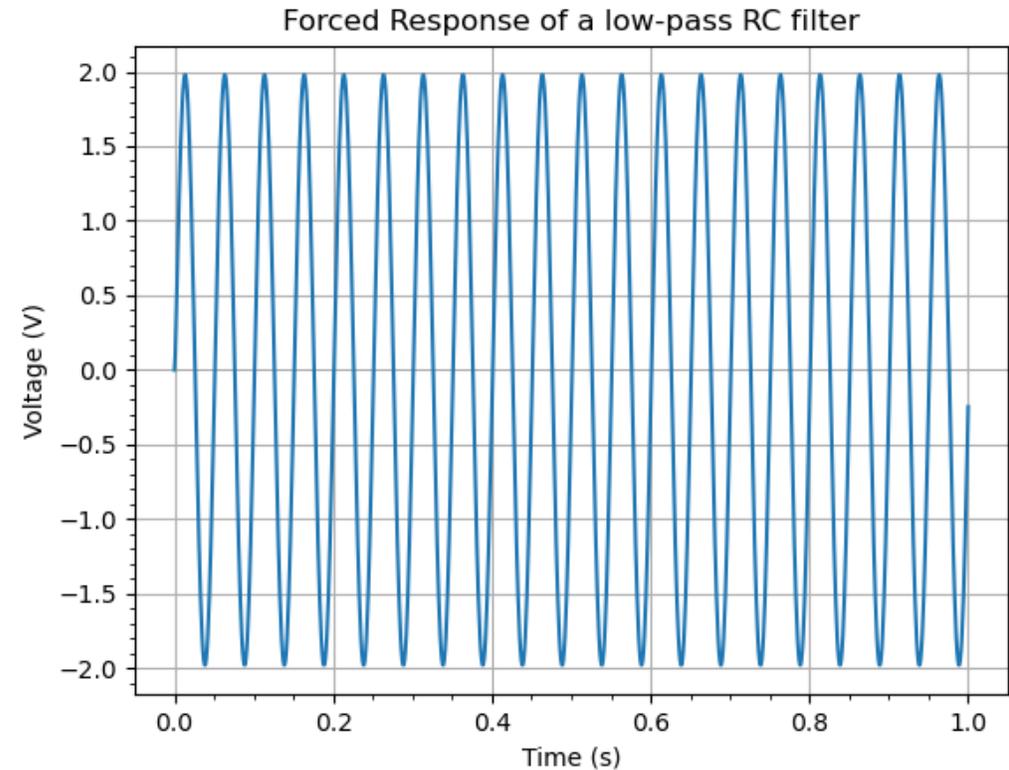


control pour l'étude des systèmes

- Réponse forcée

```
t = np.linspace(0, 1, 1001)
u = 2 * np.sin(2*np.pi*20*t)

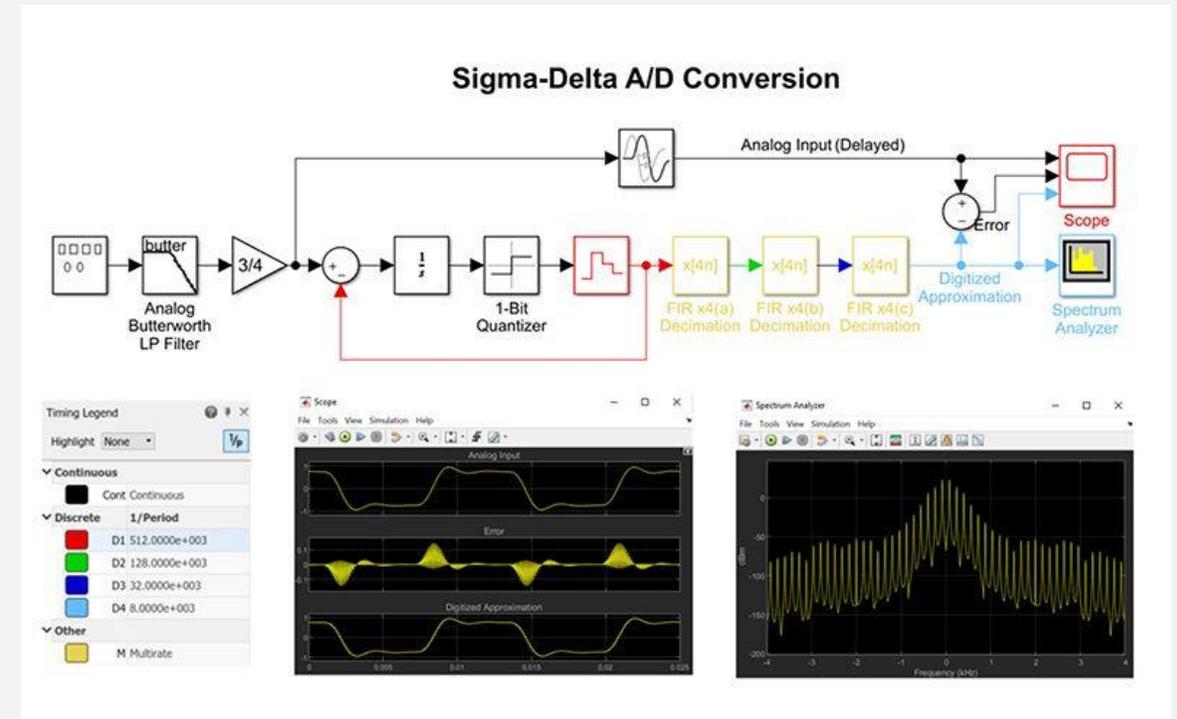
t, y = ct.forced_response(tf_sys, t, u)
```



Approche Système



- MatLab et Simulink

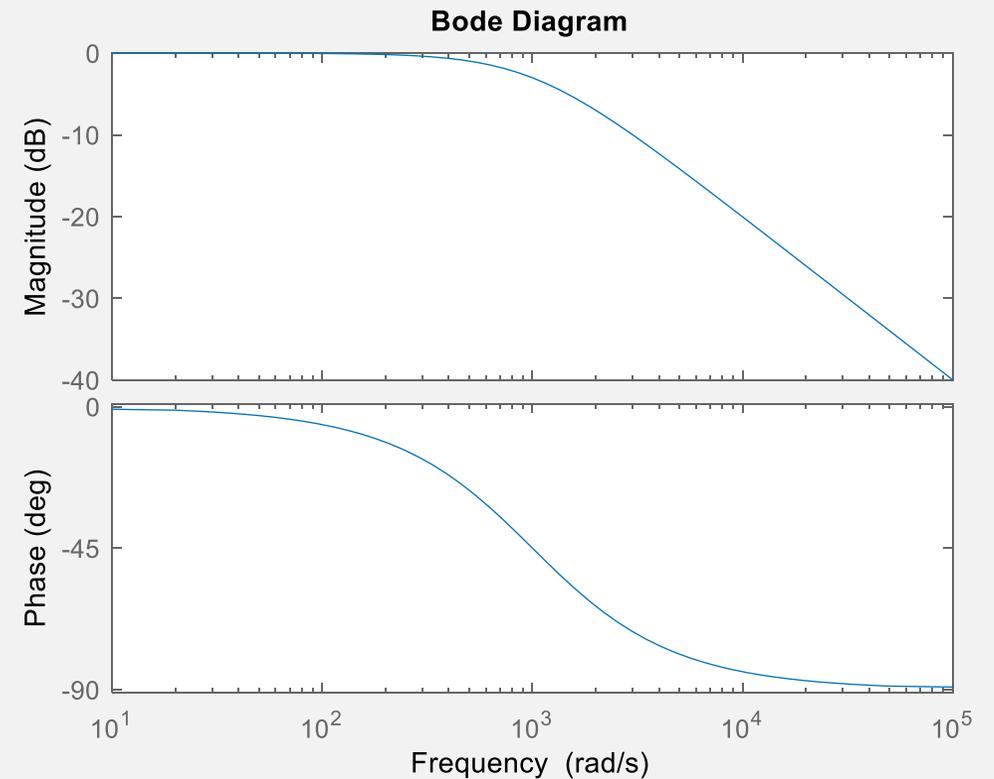


Approche Système



- Filtre RC / Bode

```
R = 1e3;  
C = 1e-6;  
  
num = [1];  
den = [(R*C) 1];  
tf_sys = tf(num, den)  
  
bode(tf_sys)
```

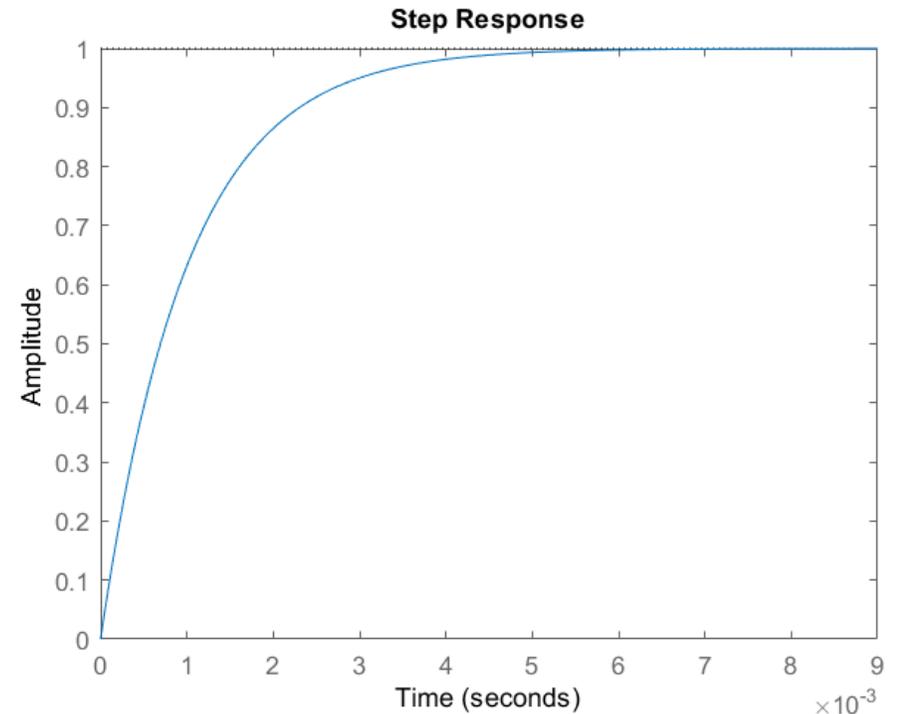


Approche Système



- Filtre RC / Step

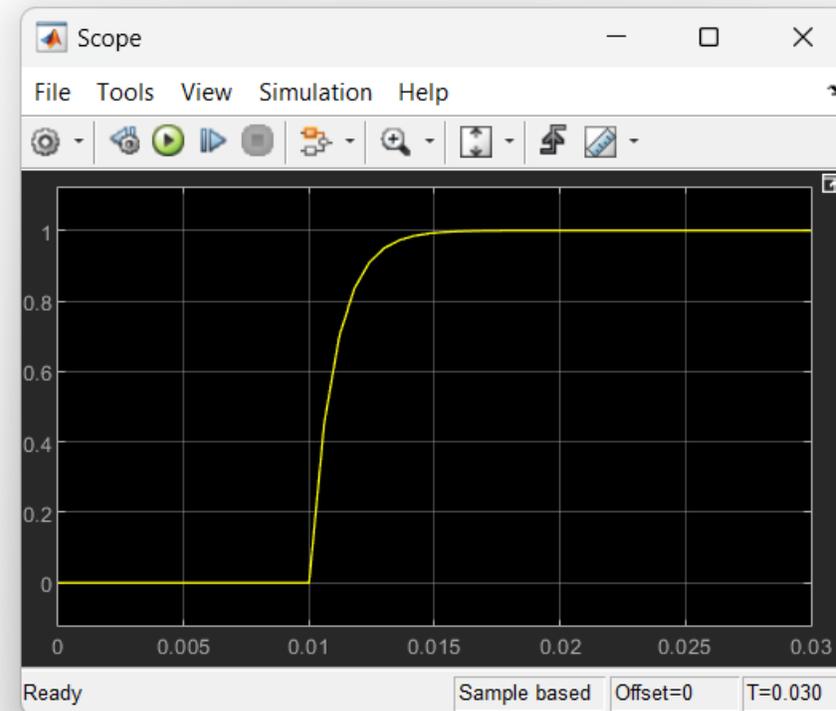
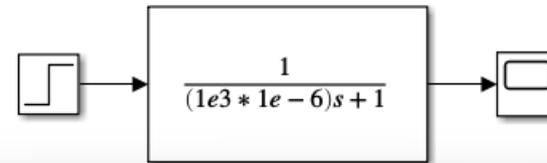
```
R = 1e3;  
C = 1e-6;  
  
num = [1];  
den = [(R*C) 1];  
tf_sys = tf(num, den)  
  
step(tf_sys)
```



Approche Système



- Filtre RC / Step



Etude d'un filtre du second ordre

ALLER PLUS LOIN

- Système du second ordre



+ Comparer les réponses en fréquence et les réponses indicielles des systèmes suivants :

- $G_0 = 1$, $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_0 = 10k \text{ rd/s}$
- $G_0 = 1$, $m = \frac{10}{\sqrt{2}}$, $\omega_0 = 10k \text{ rd/s}$
- $G_0 = 1$, $m = \frac{0,1}{\sqrt{2}}$, $\omega_0 = 10k \text{ rd/s}$
- $G_0 = 10$, $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_0 = 1k \text{ rd/s}$

$$H(p) = \frac{V_S}{V_E} = G_0 \cdot \frac{\frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{2 \cdot m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Bibliographie

Document rédigé par Julien VILLEMEJANE
LEnsE / Institut d'Optique / France

<http://lense.institutoptique.fr/>

Création : Avril 2023

- **TODO** - Auteur
link