

## Examen d'optique instrumentale

---

durée 3h

formulaire A4 recto-verso manuscrit et calculatrice autorisés

Le sujet présente quatre pages et deux annexes.

Les annexes, en mentionnant vos nom-prénom, sont à rendre avec votre copie.

### Télescope de Gregory et Optique Adaptative

*Dans ce problème, les conditions paraxiales s'appliquent. L'indice optique vaut l'unité dans tous les espaces. Les lentilles sont considérées comme minces.*

On rappelle que,  $1^\circ$  (degré) =  $\pi / 180$  (radian) =  $60'$  (minute d'angle) =  $3600''$  (seconde d'angle).

Dans une première partie, vous étudierez un télescope à deux miroirs en configuration de Gregory et dans une deuxième partie vous étudierez un système d'optique adaptative couplé au télescope. L'objet est considéré à l'infini dans tout le problème.

#### **PARTIE A : le télescope**

Le système étudié est un **télescope à deux miroirs de type Gregory** réglé pour un objet placé à l'infini. Il est constitué d'un miroir primaire  $M_1$  troué en son centre et d'un miroir secondaire  $M_2$ . Les données connues sont les suivantes :

- Télescope défini par son foyer image  $F'$  et son plan principal image  $H'$
- Miroir primaire  $M_1$  concave de sommet  $S_1$  et de foyer  $F_1$
- Miroir secondaire  $M_2$  concave de sommet  $S_2$  et de foyer  $F_2$
- Distance focale du télescope  $|f'| = 400 \text{ mm}$
- Rayon de courbure du miroir primaire  $|R_1| = 200 \text{ mm}$
- Diamètre du miroir primaire  $\phi_1 = 100 \text{ mm}$
- Rayon de courbure du miroir secondaire  $|R_2| = 64 \text{ mm}$
- Pouvoir de réflexion de chaque miroir  $\mathcal{R} = 90\%$
- Longueur d'onde d'utilisation du télescope  $\lambda = 500 \text{ nm}$

1. Montrer, à l'aide d'un schéma de principe, que la distance focale  $f'$  est négative pour le télescope de Gregory.

2. Écrire les conjugaisons à travers tout le télescope pour un objet à l'infini. Déterminer le signe et la valeur du grandissement du miroir secondaire  $M_2$ . Faire l'application numérique.
3. Montrer que la distance entre les deux miroirs vaut  $\overline{S_1 S_2} = -140 \text{ mm}$ .
4. Montrer que la distance  $\overline{S_1 F'} = +20 \text{ mm}$ .

La pupille (diaphragme d'ouverture) du télescope est le miroir primaire.

5. Déterminer le diamètre et la position de la pupille de sortie du télescope. Faire l'application numérique. Vérifier que la distance  $\overline{P_S F'} = +118,5 \text{ mm}$ .
6. Sur l'annexe n°1 (échelle longitudinale  $\times 1$  - échelle transversale  $\times 1$ ), positionner les deux miroirs (le sommet du miroir secondaire est déjà placé). A l'aide de constructions géométriques, positionner la pupille de sortie.  
*Vos traits de crayon seront minimalistes mais suffisamment compréhensibles pour la correction. Prenez le temps de confronter les valeurs obtenues par le tracé et vos valeurs calculées à la question précédente.*
7. Sur l'annexe n°1, tracer deux rayons, provenant d'un objet ponctuel placé à l'infini sur l'axe, traversant le télescope dans sa totalité et s'appuyant sur les deux bords de la pupille d'entrée.

Le diamètre du champ de pleine lumière image est fixé à  $\phi'_{CPL} = 40 \text{ mm}$ .

8. Déterminer les diamètres du champ de pleine lumière dans les plans objet et intermédiaire du télescope. Faire l'application numérique.
9. Sur l'annexe n°1, tracer deux rayons, provenant d'un objet ponctuel placé à l'infini au bord du champ de pleine lumière, traversant le télescope dans sa totalité et s'appuyant sur les deux bords de la pupille d'entrée.
10. Sur l'annexe n°1, mesurer à la règle le diamètre du trou central du miroir primaire et le diamètre du miroir secondaire  $M_2$  pour obtenir le champ de pleine lumière. En déduire le taux d'obturation minimal du télescope. Faire l'application numérique.
11. En supposant le télescope limité par la diffraction, déterminer le diamètre de la tache de diffraction dans l'espace image. Faire l'application numérique.
12. En déduire la résolution angulaire dans l'espace objet. Vous donnerez votre résultat numérique en seconde d'arc.
13. Si on place un capteur ayant des pixels carrés de  $20 \mu\text{m}$  de côté dans le plan du foyer image du télescope, que devient la résolution objet du télescope ?
14. Avec quelle précision longitudinale doit-on positionner le capteur ?

La magnitude apparente  $m$  est l'échelle utilisée pour définir la luminosité d'un objet céleste quelconque dans le ciel vu depuis la Terre. Elle s'exprime comme,

$$m = -2,5 \times \log_{10} \left( \frac{E}{E_{ref}} \right)$$

Où  $E$  est l'éclairement de l'objet produit à la surface de la Terre et  $E_{ref}$  l'éclairement de référence (étoile Véga de la constellation de la Lyre située au zénith) qui vaut  $2,52 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Vous pointez le télescope vers une étoile non résolue de magnitude  $m = 6$ , qui est par ailleurs la magnitude minimale détectable à l'œil nu.

- 15.** Calculer le flux reçu dans le plan focal du télescope. Vous donnerez votre résultat numérique en nombre de photons par seconde (*constantes utiles*:  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

## **PARTIE B : l'optique adaptative**

La résolution des télescopes sur Terre est fortement limitée par les turbulences atmosphériques. L'utilisation d'un système optique adaptatif permet de compenser en temps réel les déformations dues à ces turbulences. Le principe consiste à analyser le défaut du front d'onde provoqué par les turbulences et déformer en temps quasi réel un miroir disposé sur le trajet des faisceaux pour obtenir une image sans défaut.

Le système, situé après le télescope (sans le capteur), est constitué dans l'ordre des éléments suivants :

- Lentille convergente  $L_1$  de centre  $O_1$  de distance focale  $f'_1 = \overline{O_1 F'_1} = 75 \text{ mm}$
- Lentille convergente  $L_2$  de centre  $O_2$  de distance focale  $f'_2 = \overline{O_2 F'_2} = 50 \text{ mm}$
- Miroir plan déformable, de centre  $O_{MD}$  (il est incliné par rapport à la direction de propagation du faisceau lumineux pour éviter un retour vers le télescope mais pour des raisons de simplicité et pour ne pas replier l'axe optique, le miroir déformable est assimilé à une lame transparente d'épaisseur nulle)
- Système afocal constitué par deux lentilles convergentes  $L_3$  et  $L_4$  de focales  $f'_3 = \overline{O_3 F'_3} = 100 \text{ mm}$  et  $f'_4 = \overline{O_4 F'_4} = 50 \text{ mm}$  et positionné tel que  $\overline{O_{MD} O_3} = 50 \text{ mm}$
- Analyseur de front d'onde de centre  $O_A$ . C'est un capteur équivalent à un capteur étendu pixellisé.

Pour un fonctionnement optimal, il est nécessaire que le miroir déformable et l'analyseur de front d'onde soient situés dans des plans conjugués de la pupille de sortie du télescope. Le miroir déformable doit de plus être éclairé en faisceaux collimatés. Enfin pour limiter la taille des différents éléments la lentille  $L_1$  est située dans le plan focal image du télescope. C'est une lentille de champ.

- 16.** Pourquoi doit-on placer le foyer objet  $F_2$  de la lentille  $L_2$  sur le centre  $O_1$  de la lentille  $L_1$  ? Vous pouvez illustrer votre réponse par un schéma de principe.

L'association des lentilles  $\{L_1 + L_2\}$  conjugue le centre de la pupille de sortie du télescope et le centre du miroir déformable  $O_{MD}$ .

- 17.** Déterminer la distance à  $L_2$  du centre du miroir déformable  $\overline{O_2 O_{MD}}$  (forcément positive) pour que cette condition soit vérifiée. Faire l'application numérique.
- 18.** Déterminer le diamètre de la pupille au niveau du miroir déformable. Faire l'application numérique.
- 19.** Sur l'annexe n°2, représenter (échelle longitudinale  $\times 1/2$  - échelle transversale  $\times 1$ ) la pupille de sortie du télescope (son point sur l'axe est imposé), les lentilles  $L_1$  et  $L_2$ . Tracer à partir de la pupille de sortie deux rayons correspondants à un point à l'infini sur l'axe et deux rayons correspondant à un point à l'infini au bord du bord de champ de pleine lumière.  
*Si vous n'avez pas réussi à calculer le diamètre de la pupille de sortie du télescope à la question 5, prenez un diamètre arbitraire de 30 mm.*
- 20.** Sur l'annexe n°2, mesurer à la règle les diamètres des lentilles  $L_1$  et  $L_2$  pour qu'elles ne limitent pas le champ de pleine lumière du télescope.

Le système afocal  $\{L_3 + L_4\}$  doit conjuguer la pupille (située au niveau du miroir déformable) et l'analyseur de front d'onde.

- 21.** Déterminer la taille minimale de l'analyseur du front d'onde. Faire l'application numérique.
- 22.** Sur l'annexe n°2, positionner les lentilles  $L_3$  et  $L_4$  sur le même axe optique (on rappelle que le miroir déformable est équivalent à une lame transparente d'épaisseur nulle). Poursuivez vos tracés de rayons jusqu'à l'analyseur de front d'onde, situé dans le plan image de la pupille.

## CORRECTION

1. Schéma pour montrer que  $H'F' < 0$

$$2. \theta(\infty) \xrightarrow{M1} F_1: y' = -f_1\theta \xrightarrow{M2} F': y'' = g_2 y' = -g_2 f_1 \theta = f' \theta \rightarrow g_2 = -\frac{f'}{f_1} = -\frac{-400}{100} = -4$$

$$3. g_2 = -\frac{\overline{S_2 F_2}}{\overline{F_2 F_1}} \rightarrow \overline{F_2 F_1} = -\frac{\overline{S_2 F_2}}{g_2} = \overline{F_2 S_2} + \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F_1} \rightarrow \overline{S_1 S_2} = \frac{32}{-4} - 32 - 100 = -140 \text{ mm}$$

$$4. g_2 = -\frac{\overline{F_2 F'}}{\overline{S_2 F_2}} \rightarrow \overline{F_2 F'} = -g_2 \overline{S_2 F_2} = \overline{F_2 S_2} + \overline{S_2 F'} \rightarrow \overline{S_2 F'} = -g_2 \overline{S_2 F_2} - \overline{F_2 S_2} = 4 \times 32 + 32 = 160 \text{ mm}$$

$$\overline{S_1 F'} = \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 F'} = -140 + 160 = 20 \text{ mm}$$

$$5. P_E = M_1 \xrightarrow{M1} M_1 \xrightarrow{M2} P_S$$

$$\frac{1}{\overline{S_2 P_S}} + \frac{1}{\overline{S_2 S_1}} = \frac{2}{\overline{S_2 C_2}} \rightarrow \overline{S_2 P_S} = 41,5 \text{ mm} \rightarrow \phi_{PS} = \frac{\overline{S_2 P_S}}{\overline{S_2 S_1}} \times \phi_{PE} = 29,6 \text{ mm}$$

6. Annexe 1 : tracé PS

7. Annexe 1 : tracé point sur l'axe

$$8. \phi_{CPL-int} = \frac{\phi_{CPL-image}}{g_2} = \frac{40}{4} = 10 \text{ mm}; \theta_{CPL-objet} = \frac{\phi_{CPL-image}}{f'} = \frac{40}{400} = 0,1 \text{ rad} = 5,7^\circ$$

9. Annexe 1 : tracé bord CPL

$$10. \phi_{Trou M1} \approx 40 \text{ mm}; \phi_{M2} \approx 54 \text{ mm} \rightarrow \tau_{obturation\_min} = \left(\frac{\phi_{M2}}{\phi_{PE}}\right)^2 \approx 29\%$$

$$11. \phi_{airy} = 2,44\lambda N = 2,44\lambda \frac{f'}{\phi_{PE}} = 4,9 \mu\text{m}$$

$$12. \delta\theta = \frac{\phi_{airy}}{f'} = 6,1 \mu\text{rad} = 1,26''$$

$$13. \text{La résolution est dégradée par le pixel. } \delta\theta = \frac{2\text{pixel}}{f'} = 100 \mu\text{rad} = 20''$$

14. La précision du positionnement doit être plus petite que la profondeur de foyer définie par le pixel et l'ouverture du télescope, soit  $\varepsilon < \frac{\text{pixel}}{20N} = N \times \text{pixel} = 4 \times 20 \mu\text{m} = 80 \mu\text{m}$

15. Image d'une étoile = tache de diffraction qui est plus petite que le pixel donc le flux reçu sur un pixel est le flux reçu au niveau de PE, modulo la transmission.

$$F_{\text{pixel}} = S_{PE} \times E_{\text{Terre}} \times \tau = \frac{S_{PE} \times E_{\text{ref}} \times 10^{-\frac{6}{2,5}} \times \mathcal{R}_{\text{miroir}}^2 \times (1 - \tau_{\text{obturation}})}{hc/\lambda}$$

$$= \frac{\pi/4 \times (100\text{mm})^2 \times 2,52 \cdot 10^{-8} \times 10^{-\frac{6}{2,5}} \times 0,9^2 \times (1 - 0,29)}{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 / 500\text{nm}} \approx 10^6 \text{ ph/s}$$

16. L'image fournie par le télescope est en F'. Si on place la lentille L1 dans ce plan, elle ne changera pas la position de l'image. Pour éclairer le miroir déformable avec un faisceau collimaté, il faut envoyer l'image à l'infini à travers L2 soit garantir  $F'=O1=F2$

$$17. P_S (\overline{O_1 P_S} = -118,5) \xrightarrow{L1} P_S \text{ int} \xrightarrow{L2} O_{MD}$$

$$\frac{1}{\overline{O_1 P_{S\_int}}} - \frac{1}{\overline{O_1 P_S}} = \frac{1}{f'_1} \rightarrow \overline{O_1 P_{S\_int}} = 204,3 \text{ mm} \rightarrow \frac{1}{\overline{O_2 O_{MD}}} - \frac{1}{\overline{O_2 P_{S\_int}}} = \frac{1}{f'_2} \rightarrow \overline{O_2 O_{MD}} = 37,7 \text{ mm}$$

$$18. \rightarrow |\phi_{P_{S\_int}}| = \frac{\overline{O_1 P_{S\_int}}}{\overline{O_1 P_S}} \times \phi_{P_S} = 51 \text{ mm} \rightarrow |\phi_{P_{SMD}}| = \frac{\overline{O_2 O_{MD}}}{\overline{O_2 P_{S\_int}}} \times \phi_{P_{S\_int}} = 12,5 \text{ mm}$$

19. Annexe 2 : tracé jusqu'au miroir déformable

20.  $\phi_{L1} = CPL \text{ image} = 40 \text{ mm}$  ;  $\phi_{L2} \sim 40 \text{ mm}$

21. Le système afocal a un grandissement constant  $f_4/f_3 = 0,5$ . L'analyseur devra donc avoir une taille minimale de  $\phi_{P_{SMD}}/2$  soit environ 6 mm

22. Annexe 2 : tracé jusqu'à l'analyseur de front d'onde

