

Examen d'optique instrumentale

durée 3h

formulaire A4 recto-verso manuscrit et calculatrice autorisés

Le sujet présente cinq pages et une annexe.

L'annexe, en mentionnant vos nom-prénom, est à rendre avec votre copie.

Le projet EXiOgs

Une exo-Terre est-elle bleue comme une orange ?
(en référence au poème « la Terre est bleue » de Paul Eluard, 1929)

La recherche de planètes type Terre situées hors du système solaire (exo-Terre ou exoplanète) est un domaine de l'astrophysique très actif. En particulier le développement de systèmes optiques efficaces est un challenge technologique auquel les grandes agences spatiales à travers le monde s'attellent. Le premier satellite dédié à la détection des exoplanètes fût CoRoT (Convection, Rotation and planetary Transits). Lancé par l'Agence spatiale française (CNES) en 2006, CoRoT a été la première mission spatiale spécialement conçue pour détecter des exoplanètes par la méthode du transit, c'est-à-dire en observant la diminution de la luminosité d'une étoile lorsqu'une planète passe devant elle.

Dans ce problème, les conditions paraxiales s'appliquent. L'indice optique vaut l'unité dans tous les espaces.

Les deux parties A et B sont totalement indépendantes

A. Préambule à la problématique

L'étoile « Proxima Centuri » est l'étoile la plus proche de notre système solaire. Elle est située à 4,22 années-lumière soit 4.10^{16} m. Son diamètre est estimé à 2.10^8 m.

1. Déterminer sous quel diamètre angulaire on voit cette étoile à l'œil nu depuis la Terre. Vous donnerez le résultat en radians puis en arc-secondes.

Pour observer cette étoile, on souhaite utiliser un télescope de focale f' couplé à un capteur matriciel de taille 5000 pixels par 5000 pixels (un pixel = $10 \mu\text{m}$) de côté.

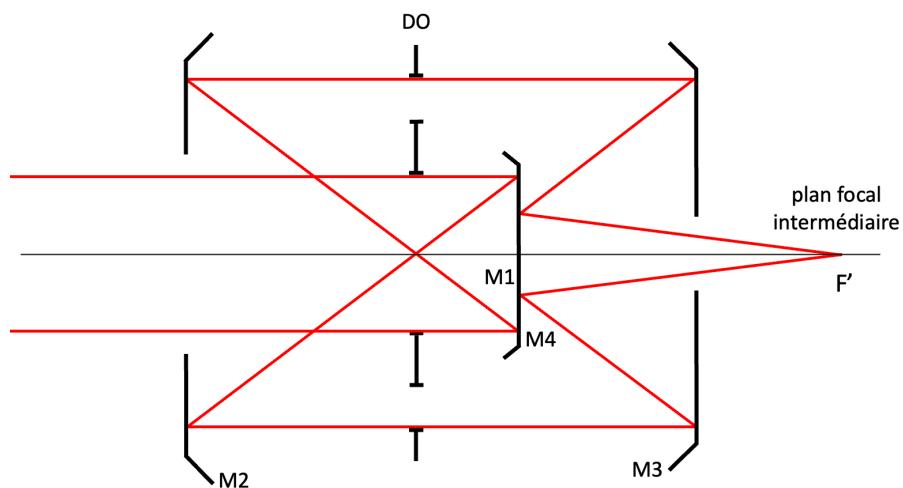
2. On souhaite dans un premier temps obtenir une image de l'étoile de diamètre égal au côté du capteur. Quelle focale faut-il avoir pour notre télescope ?
3. Que devient la focale du télescope si l'image de l'étoile est égale à un seul pixel ?
4. Dans ce dernier cas, déterminer le diamètre de la pupille d'entrée du télescope pour que la résolution du système optique ne soit pas dégradée par la diffraction. La longueur d'onde est 500 nm. Calculer le nombre d'ouverture N de ce télescope.

Cette petite étude montre qu'il est extrêmement difficile de faire de l'imagerie directe des étoiles et donc encore plus des planètes gravitant autour.

B. Le projet EXiOgs

Au lieu de chercher à résoudre directement l'exoplanète, les astronomes essaient de mesurer les effets qu'elle induit sur son étoile, en particulier les variations de flux reçu sur Terre par cette dernière. C'est la méthode du transit. Le passage répété d'une planète devant son étoile provoque une diminution périodique de la luminosité de l'étoile. Le satellite CoRoT fonctionne dans ce mode de transit photométrique. Lorsqu'une planète passe devant son étoile, la variation relative de flux $\Delta F/F$ engendrée est simplement reliée au rapport des deux surfaces. Pour une planète de type Terre et une étoile de type Soleil, on trouve que $\Delta F/F = 10^{-6}$. Il est donc nécessaire d'éviter tout flux parasite, provenant essentiellement de la Terre. Les contraintes sont de l'ordre d'un photon parasite pour 10^{12} photons utiles.

Nous vous proposons d'étudier un système optique dont l'architecture pourrait servir à une telle détection. Il s'agit du projet de télescope EXiOgs issu des archives du club astro de SupOp (source non vérifiée !). La configuration optique comprend un système afocal à deux miroirs de type Gregory pour réduire le champ, un télescope de type Cassegrain pour former un plan focal intermédiaire (voir schéma ci-dessous qui n'est pas à l'échelle) et un système optique à lentilles pour la gestion de la pupille de sortie et du plan focal final où se situe le capteur (non représenté sur le schéma).



Les données connues des différents éléments sont les suivantes :

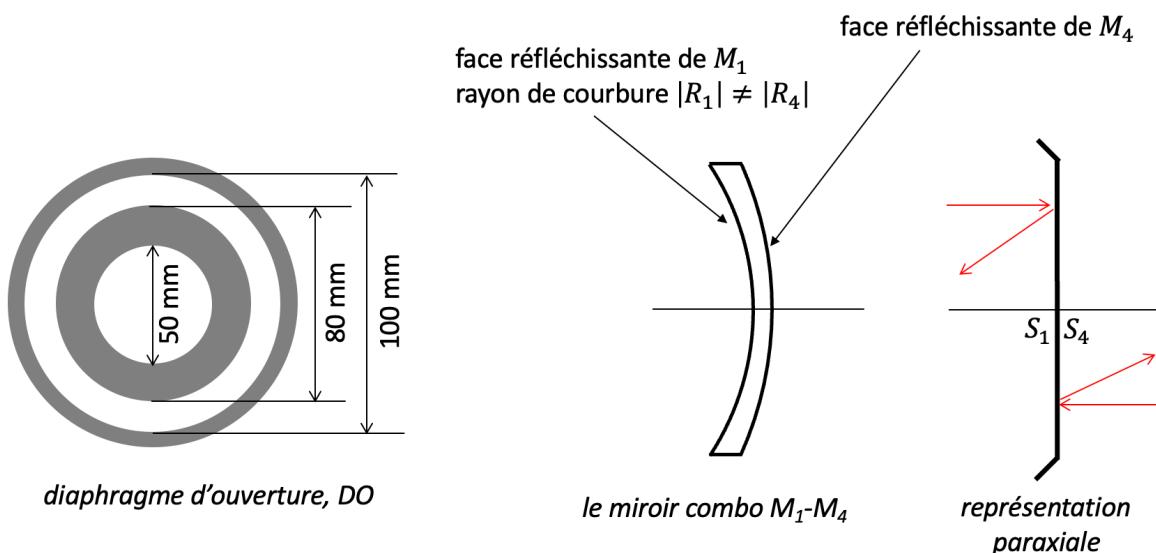
Système Afocal Gregory

- Miroir primaire M_1 concave de sommet S_1 et de foyer F_1
- Miroir secondaire M_2 concave de sommet S_2 et de foyer F_2
- Rayon de courbure du miroir M_1 $|R_1| = 500 \text{ mm}$
- Rayon de courbure du miroir M_2 $|R_2| = 1000 \text{ mm}$

Système Imageur Cassegrain

- Miroir primaire M_3 concave de sommet S_3 et de foyer F_3
- Miroir secondaire M_4 convexe de sommet S_4 et de foyer F_4
- Rayon de courbure du miroir M_3 $|R_3| = 1500 \text{ mm}$
- Rayon de courbure du miroir M_4 $|R_4| = 750 \text{ mm}$
- La distance entre les deux miroirs du télescope Cassegrain est $\overline{S_4 S_3} = +500 \text{ mm}$

Le **diaphragme d'ouverture** DO est situé dans le plan focal commun des miroirs M_1 et M_2 . Il joue le rôle de pupille d'entrée et de pupille de sortie du système afocal. Le schéma ci-dessous donne la coupe de cette pupille avec ses dimensions caractéristiques.



Particularité : le miroir M_4 est situé dans le même plan que le miroir M_1 . Cela veut dire que la face de gauche est le miroir M_1 et la face de droite est le miroir M_4 (voir schéma ci-dessus). Les deux faces ont des rayons de courbures différentes. Dans les conditions paraxiales, on considère les sommets S_2 et S_4 confondus.

On appelle F' le foyer image et f'_{TS} la distance focale du système optique constitué du système afocal Grégoire et du système imageur Cassegrain.

- Quelle doit être la distance entre les miroirs M_1 et M_2 pour obtenir un système afocal ? Donner le grossissement G_{afocal} et le grandissement transversal g_{afocal} de ce système.

Sur la feuille fournie en annexe (échelle longitudinale $\times 1/10$; échelle transversale $\times 1$), le sommet S_2 du miroir M_2 est déjà placé. Positionner tous les miroirs et le diaphragme d'ouverture DO (C_3 est hors la feuille).

- Expliquer pourquoi le diamètre intérieur du DO (50 mm) est deux fois plus petit que le diamètre extérieur (100 mm).
- Déterminer la focale f'_{Cas} du télescope Cassegrain. Précisez son signe.
- Montrer que la distance $\overline{S_3F'} = +250 \text{ mm}$ entre le miroir M_3 et le foyer F' .
- Montrer que la focale f'_{TS} de tout le système $\{M_1 + M_2 + M_3 + M_4\}$ s'écrit en fonction du grossissement G_{afocal} et de f'_{Cas} et que sa valeur vaut -1125 mm .
- Où se situent les pupilles intermédiaires situées dans l'espace entre les miroirs M_1 et M_2 et dans l'espace entre les miroirs M_3 et M_4 .
- Déterminer la position et la taille de la pupille de sortie du système complet constitué des deux télescopes (dans l'espace après M_4).
- Sur l'annexe, à l'aide de constructions géométriques, positionner la pupille de sortie du système complet constitué des deux télescopes.
Vos traits de crayon seront minimalistes mais suffisamment compréhensibles pour la correction. Prenez le temps de confronter les valeurs obtenues par le tracé et vos valeurs calculées à la question précédente.
- Sur l'annexe, tracer deux rayons provenant d'un objet ponctuel placé à l'infini sur l'axe et traversant le système dans sa totalité en s'appuyant sur les deux bords de la pupille d'entrée.
- Sur l'annexe, positionner le plan principal image H' (du système complet) et vérifier la valeur de f'_{TS} .

Le diamètre du champ de pleine lumière image (en F') est fixé à $\phi'_{CPL} = 20 \text{ mm}$.

- Déterminer la valeur du champ de pleine lumière (bord à bord) dans l'espace objet.
- Sur l'annexe, tracer deux rayons qui s'appuient sur les deux bords de la pupille d'entrée pour un point objet à l'infini situé sur l'un des bords du champ de pleine lumière et qui traversent l'ensemble du système.
- Sur l'annexe, mesurer à la règle les diamètres des quatre miroirs et des trous centraux de M_2 et M_3 pour obtenir le champ de pleine lumière.

Afin de générer deux voies instrumentales après le foyer intermédiaire F' , il est nécessaire de disposer d'un séparateur de faisceau dans un plan pupillaire. Pour cela on place une lentille de champ (mince) convergente L_1 dans le plan focal F' . Son diamètre vaut le diamètre du champ de pleine lumière image imposé ci-dessus, soit $\phi_{L_1} = 20 \text{ mm}$.

14. Déterminer la distance focale de la lentille L_1 pour former à +300 mm de F' une image de la pupille de sortie définie à la question Q7. En déduire le diamètre de la nouvelle pupille de sortie du système {télescopes + L_1 }.

Une deuxième lentille (mince) convergente L_2 permet de projeter l'image finale sur un capteur pixellisé disposé à +800 mm de F' . Les pixels sont carrés de côté 10 μm .

15. Déterminer la distance focale et la position de L_2 pour obtenir un champ image final de diamètre $|\phi''_{CPL}| = |\phi'_{CPL}| = 20 \text{ mm}$.

16. Sur l'annexe, positionner les lentilles L_1 et L_2 et poursuivez vos tracés pour le point sur l'axe et le point situé au bord du champ de pleine lumière. Vous adapterez le diamètre de L_2 pour ne pas limiter le champ de pleine lumière et vous positionnerez la pupille de sortie déterminée à la question 14.

17. Déterminer la distance focale f'_{TSL} et le nombre d'ouverture N_{TSL} du système complet {télescopes + $L_1 + L_2$ }..

18. Déterminer quel est, entre le système optique et le capteur, l'élément limitant la résolution de l'image (on prendra une longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$) ? Déterminer la résolution dans l'espace objet. Faire l'application numérique.

Le flux total émis dans tout l'espace par l'étoile « Proxima Centuri » est de l'ordre de 10^{27} W . L'étoile est considérée comme ponctuelle. Elle est située à 4,22 années-lumière soit 4.10^{16} m .

Dans cet instrument, le faisceau ne peut se propager au-delà du diaphragme d'ouverture qu'en traversant son anneau externe. Les deux bords de l'anneau externe du diaphragme d'ouverture limitent donc l'ouverture du faisceau dans l'instrument.

19. Calculer le taux d'obturation du système optique.

Le coefficient de réflexion de chaque miroir vaut 90%. Les lentilles transmettent 100%.

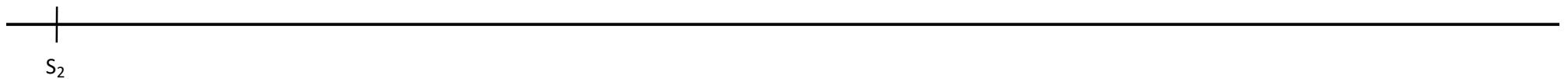
20. Calculer le flux moyen reçu sur un pixel éclairé du capteur.

ANNEXE

Nom Prénom

échelle longitudinale : X 1/10

échelle transversale : X 1



CORRECTION

une erreur s'était glissée dans la fig. 2 - schéma de droite : S_2 apparaissait à la place de S_1 .

PARTIE A

1. $\theta_{\text{étoile}} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ rad} = 10^{-3} \text{ arcsec}$
2. $f' = \frac{\text{CCD}}{\theta_{\text{étoile}}} = 10000 \text{ km}$
3. $f' = \frac{\text{pixel}}{\theta_{\text{étoile}}} = 2000 \text{ m}$
4. $\phi_{\text{Airy}} > \text{pixel} \rightarrow \phi_{\text{PE}} > 2,44 \frac{\lambda f'}{\text{pixel}} = 244 \text{ m} \rightarrow N = \frac{2000}{244} = 8,2$

PARTIE B

1. $|f_1| + |f_2| = 750 \text{ mm}; G_{\text{afocal}} = \frac{1}{g_{\text{afocal}}} = \frac{f_1}{f_2} = -0,5$
2. Un système afocal a un grandissement constant donc on a : $\phi_{\text{PE}} = \frac{\phi_{\text{PS}}}{g_{\text{afocal}}} = \frac{100}{2} = 50 \text{ mm}$
3. Gullstrand (déplié) : $\frac{1}{f'_{\text{cas}}} = \frac{1}{f_{l3}} + \frac{1}{f'_{l4}} - \frac{e}{f'_{l3}f'_{l4}} = \frac{1}{750} + \frac{1}{-337,5} - \frac{500}{750 \times -337,5} \rightarrow f'_{\text{cas}} = +2250 \text{ mm}$
4. $g_4 = -\frac{f'_{\text{cas}}}{f_3} = -\frac{2250}{-750} = +3$
 $\rightarrow g_4 = -\frac{\overline{F_4 F'}}{\overline{S_4 F_4}} \rightarrow \overline{F_4 F'} = -g_4 \overline{S_4 F_4} = \overline{F_4 S_4} + \overline{S_4 F'} \rightarrow \overline{S_4 F'} = -g_4 \overline{S_4 F_4} - \overline{F_4 S_4} = -3 \times -375 - 375$
 $= 750 \text{ mm} \rightarrow \overline{S_3 F'} = \overline{S_3 S_4} + \overline{S_4 F'} = -500 + 750 = +250 \text{ mm}$
5. On écrit les conjugaisons $\infty(\theta) \xrightarrow{\text{Gregory}} \infty(\theta' = G_{\text{afocal}} \times \theta) \xrightarrow{\text{Cassegrain}} F'(y' = f'_{\text{cas}} \times \theta')$
Soit $f'_{TS} = G_{\text{afocal}} \times f'_{\text{cas}} = -1125 \text{ mm}$
6. PE et PS du Gregory sont aux foyers donc Pupilles intermédiaires à l'infini
7. $DO = F_3 \xrightarrow{M3} \infty \xrightarrow{M4} F_4 \rightarrow \phi_{\text{PS}} = \frac{f_4}{f_3} \times \phi_{\text{DO}} = \frac{375}{750} \times 100 = 50 \text{ mm}$
8. Schéma pupille (page suivante)
9. Schéma axe (page suivante)
10. Schéma - $\overline{H'F'} = f'_{TS} \sim -1125 \text{ mm} \pm 20 \text{ mm}$ (précision de qq mm sur le tracé)
11. $\theta_{\text{CPL-objet}} = \frac{\phi'_{\text{CPL}}}{f'_{TS}} = \frac{20}{1125} = 0,0178 \text{ rad} \sim 1^\circ$
12. Schéma CPL (page suivante). On notera que les pupilles intermédiaires étant à l'infini les rayons pour le pt sur l'axe et pour les points dans le champ sont parallèles entre eux.
13. $\phi_{M1-M4} \sim 56 \text{ mm}; \phi_{M2} \sim 104 \text{ mm}; \phi_{\text{trou}-M2} \sim 63 \text{ mm}; \phi_{M3} \sim 107 \text{ mm}; \phi_{\text{trou}-M3} \sim 26 \text{ mm}$
14. $Ps(\overline{O_1 Ps}) = -(500 + 375 + 250) = -1125 \text{ mm} \xrightarrow{l1} Ps'(\overline{O_1 Ps'}) = +300 \text{ mm}$
 $\frac{1}{\overline{O_1 Ps'}} - \frac{1}{\overline{O_1 Ps}} = \frac{1}{f'_{L1}} \rightarrow f'_{L1} = 237 \text{ mm}; \phi_{Ps'} = \phi_{Ps} \frac{\overline{O_1 Ps'}}{\overline{O_1 Ps}} = 50 \frac{300}{1125} = 13,3 \text{ mm}$
15. Grandissement -1 pour L_2 (conjugaison $2f' - 2f'$ donc distance entre objet (F') et image à diviser par 4) soit simplement $f'_{L2} = \frac{800}{4} = 200 \text{ mm}$
16. Schéma lentilles (on s'appuie sur la pupille de sortie)
17. L_1 ne modifie rien car elle est sur F' (c'est une lentille de champ). Et L_2 travaille pour une conjugaison -1, soit $f'_{TSL} = -f'_{TS} = +1125 \text{ mm}; N_{TSL} = \frac{f'_{TSL}}{\phi_{PE}} = \frac{1125}{50} = 22,5$
18. $\phi_{\text{airy}} = 2,44 \lambda N_{TSL} = 27,45 \mu\text{m} > \text{pixel} \rightarrow \delta\theta = \frac{\phi_{\text{airy}}}{f'_{TSL}} = 12,2 \mu\text{rad} = 2,5''$
19. « Les deux bords de l'anneau externe du diaphragme d'ouverture limitent donc l'ouverture du faisceau dans l'instrument. ». L'obturation est donc le rapport (au carré) des diamètres interne (80 mm) sur externe (100 mm). Tout ce qui entre dans DO-PE ne traverse pas DO-PS (Gregory).
(voir empreinte faisceau rouge sur le schéma) donc $\tau_{\text{obturation}} = \left(\frac{80}{100}\right)^2 \approx 64\%$
20. Le flux qui entre dans PE se retrouve dans la tache de diffraction qui s'étale sur environ 6 pixels.
 $S_{\text{pixel}} = 100 \mu\text{m}^2; S_{\text{diff}} = 592 \mu\text{m}^2$
 $F_{\text{pixel}} = I_{\text{étoile}} \times \Omega_{\text{étoile-PE}} \times \tau \times \frac{S_{\text{pixel}}}{S_{\text{diff}}} = \frac{F_{\text{étoile}} S_{\text{PE}}}{4\pi} \frac{R^4}{d^2} \mathcal{R}_{\text{miroir}}^4 (1 - \tau_{\text{obturation}}) \frac{S_{\text{pixel}}}{S_{\text{diff}}} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ W}$

