

Novembre 2024

# Optique Instrumentale

Cycle Ingénieur  
1<sup>ère</sup> année



Ce document reprend une partie des éléments vus dans le cours d'optique instrumentale de la 1<sup>ère</sup> année de SupOptique. Il s'appuie sur de nombreux exemples (questionnaires, tracés de rayons, exercices) vus lors des séances de cours et de travaux dirigés. Vous trouverez une grande partie de ces éléments pédagogiques sur cette page web,

[lense.institutoptique.fr/optique-instrumentale-s5/](http://lense.institutoptique.fr/optique-instrumentale-s5/)

L'optique instrumentale s'apprend en faisant des calculs assez basiques et en traçant soi-même les rayons (une règle est nécessaire). C'est un prérequis fondamental pour la conception optique abordée en deuxième année.

Pour faire évoluer au mieux ce document je suis preneur de toutes remarques.

Merci ! [sebastien.derossi@institutoptique.fr](mailto:sebastien.derossi@institutoptique.fr)

## Sommaire

### A. Optique Paraxiale

1. L'onde lumineuse et le rayon lumineux
2. Généralités sur la formation des images
3. Étude du dioptré sphérique
4. Stigmatisme, aplanétisme et relation fondamentale des systèmes optiques
5. Foyers et distance focale du dioptré sphérique
6. Foyers et distance focale d'un système centré
7. Conjugaison à distances finies
8. Conjugaison infini-foyer et foyer-infini
9. Conjugaison infini-infini – système afocal
10. Association de systèmes centrés

### B. Limitations des faisceaux

1. Notion de pupille
2. Nombre d'Ouverture et Ouverture Numérique
3. Champ transversal – notion de lucarne
4. Imagerie sur un capteur
5. Instrument visuel
6. Système télécentrique

### C. Qualité de l'image - limite de résolution

1. La diffraction
2. Les aberrations
3. Résolution du système optique versus résolution du capteur d'image
4. Le cas de l'œil
5. Profondeur de champ
6. Précisions de pointés

### D. Performances photométriques

1. Introduction
2. Source ponctuelle – notion d'intensité et d'angle solide
3. Source non ponctuelle – notions de luminance et d'étendue

## Annexe Glossaire Français-Anglais

## A. Optique Paraxiale

### 1. L'onde lumineuse et le rayon lumineux

En négligeant l'aspect quantique, la meilleure façon de modéliser la lumière est une onde (électromagnétique) transversale se propageant à une vitesse qui dépend du milieu traversé. Le **front d'onde** (ou surface d'onde) est l'ensemble des points d'égale perturbation lumineuse (même phase). Le **rayon** décrit la direction de l'énergie lumineuse. Pour une source ponctuelle le front d'onde émis est sphérique et les rayons associés sont sortants (le caillou jeté dans l'eau d'un lac émet une jolie onde sphérique bidimensionnelle). Loin du point d'émission la courbure du front d'onde (vu par un instrument par exemple) est très grande. Le front d'onde est quasi plan et les rayons sont quasi parallèles (les vagues qui s'échouent sur une plage ou les rayons du soleil à travers les nuages). Si la source est à l'infini, le front d'onde est parfaitement plan et les rayons parfaitement parallèles (la lumière d'une étoile arrivant sur Terre ... mais avant l'atmosphère !!).

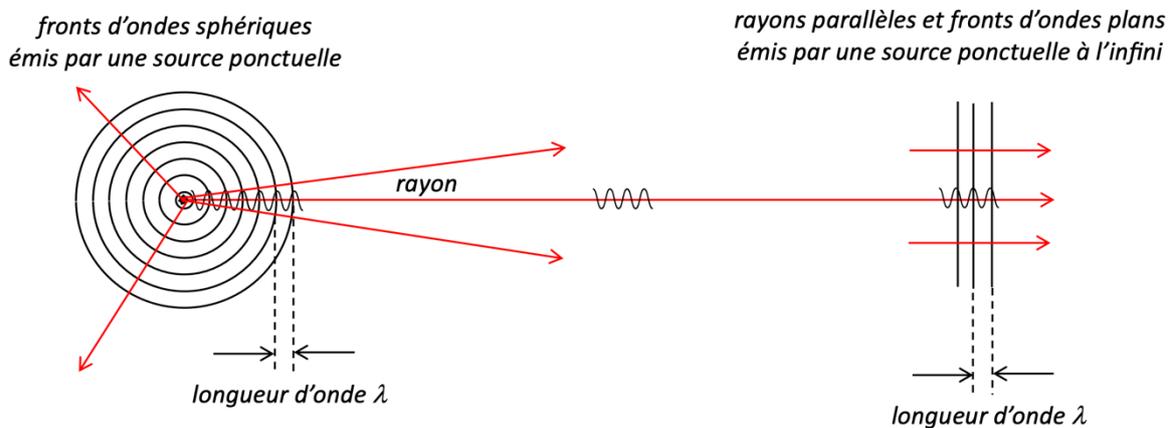
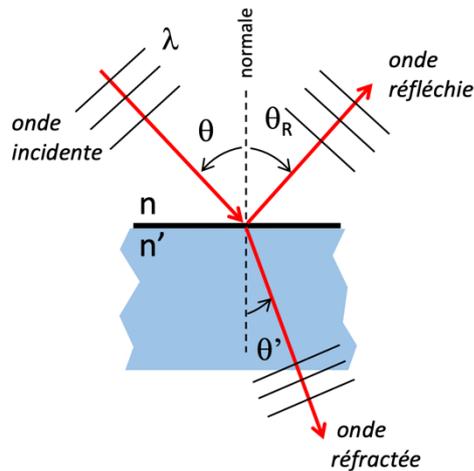


Figure : source ponctuelle et onde associée.

L'interaction entre la lumière et un milieu est un phénomène physique complexe qui nécessite la physique quantique. On retiendra que cette interaction est définie par un paramètre, usuellement appelé **indice optique**. Il dépend des grandeurs lumineuses (longueur d'onde et polarisation) et des grandeurs environnementales locales (température, pression du milieu traversé). Cet indice est un nombre complexe. Sa partie réelle décrit le déphasage que subit l'onde et sa partie imaginaire engendre la dissipation de l'énergie lumineuse (c'est l'absorption). A une interface entre deux milieux, l'onde lumineuse subit une réflexion et une transmission. La continuité de la composante transverse du champ électrique à l'interface permet de retrouver les lois bien connues de Snell-Descartes. Les flux d'énergie réfléchis  $R$  et transmis  $T$  obéissent quant à eux aux relations de Fresnel. On retiendra le cas de l'incidence normale où l'expression rappelée ci-dessous est particulièrement simple. Dans le cas d'une interface air-verre on obtient un flux réfléchi dans le domaine visible en prenant 1,5 comme indice du verre, de l'ordre de 4%. Par conservation de l'énergie, le flux transmis est de 96% si l'absorption est négligée. Ces coefficients évoluent avec la polarisation (sauf en incidence normale où les coefficients sont identiques) et avec l'angle d'incidence. Globalement si l'angle d'incidence augmente le flux réfléchi augmente et tend vers un ; à  $90^\circ$  si le milieu d'arrivée a un indice plus élevé (cas air-verre) ; à l'angle de réflexion totale  $\theta_{total} = \text{asin}(n'/n)$  si le milieu d'arrivée a un indice moins élevé (cas verre-air).



Relations de Snell-Descartes

$$\theta_R = -\theta$$

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'$$

Relations de Fresnel en incidence quasi-normale

$$R(\lambda, \theta) \approx \left( \frac{n' - n}{n' + n} \right)^2$$

Figure : relations fondamentales au passage d'une interface.

Les rayons lumineux sont définis comme les lignes de champ du vecteur de Poynting, c'est-à-dire, des trajectoires orthogonales aux fronts d'onde. La variation de la phase de l'onde lors de sa propagation est donc équivalente pour le rayon lumineux au chemin optique parcouru défini comme le produit de l'indice et du chemin géométrique. Le rayon va donc parcourir une distance entre deux points distants A et B égale à,

$$L_{AB} = \int_A^B n ds$$

D'après le principe de Fermat, la lumière suivra le trajet correspondant à un chemin optique stationnaire, ce qui s'écrit,

$$\partial L_{AB} = 0$$

Cela signifie que la différence de chemin optique entre deux trajets infiniment voisins est nulle au premier ordre et que c'est ce chemin que la lumière emprunte parmi tous ceux possibles. Il permet de retrouver la propagation rectiligne dans un milieu d'indice homogène et isotrope, les relations de Snell-Descartes à interface entre deux milieux, les conditions d'une bonne imagerie dans un instrument d'optique et la trajectoire des rayons dans les milieux inhomogènes (effet mirage par exemple).

Enfin le théorème de Malus-Dupin (que nous ne démontrerons pas) énonce que les rayons sont orthogonaux aux fronts d'onde dans un milieu isotrope. Cette relation est fondamentale lorsqu'on souhaite faire intervenir les phénomènes d'interférence et de diffraction dans un système optique.

## 2. Généralités sur la formation des images

La formation des images utilise la capacité d'un système optique à créer un point « image » à partir d'un point source « objet ». Cette propriété s'appelle le **stigmatisme**. Faire une image d'un objet consiste à traiter en parallèle tous les points de l'objet imagé. Si le stigmatisme est maintenu dans l'image formée, le système est dit **aplanétique**. L'image est dite **réelle** si elle peut être projetable sur un écran (ou un capteur), et **virtuelle** dans le cas contraire.

Dans ce document, nous nous limiterons aux systèmes optiques à symétrie de révolution (objectif photographique, jumelle, lunette/télescope pour l'astronomie, microscope, ...). On parle de systèmes optiques centrés. De façon générale, un système optique centré collecte la lumière dans un cône d'**ouverture** s'appuyant sur un point à l'intérieur de sa zone d'observation, appelé **champ (de vue)**.

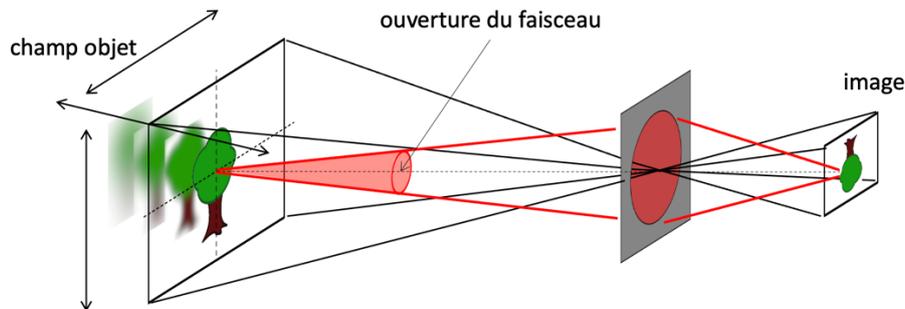


Figure : grandeurs d'un système optique d'imagerie.

L'**angle d'ouverture** objet (respectivement image) correspond à l'angle du rayon le plus incliné qui entre dans (respectivement sort de) l'instrument pour le point de l'objet placé sur l'axe optique. L'ouverture conditionne le flux transmis, la qualité de l'image et la profondeur de champ du système. Si l'objet est à l'infini, l'ouverture est définie par le diamètre du cylindre de rayons qui entrent dans le système. Le **champ** objet correspond à la taille maximale de l'objet qui peut être imagé par le système optique. On peut définir ce champ par une unité métrique si l'objet est à distance finie ou par une unité angulaire si l'objet est à l'infini. Nous aborderons en détail tous ces aspects.

Les deux briques de base de tous les systèmes optiques sont les miroirs sphériques et les dioptrés sphériques. Le système optique est dit **dioptrique** s'il comporte seulement des surfaces réfringentes (qui réfractent les faisceaux lumineux), **catoptrique** s'il comporte seulement des surfaces réfléchissantes (qui réfléchissent les faisceaux lumineux) et **catadioptrique** s'il comporte les deux types de surfaces. Afin d'aborder tous ces concepts, nous allons étudier spécifiquement le dioptré sphérique, qui est à la base de toutes les lentilles (sphériques). Son étude va nous permettre de poser les bases de l'approximation paraxiale appelée communément « optique de Gauss » ou « optique linéaire ».

### 3. Étude du dioptré sphérique

On considère une interface sphérique qui sépare deux milieux d'indice optique  $n$  et  $n'$ . On s'intéresse dans un premier temps à l'image  $A'$  d'un point  $A$  situé sur l'axe de révolution du dioptré (celui qui contient le centre de courbure  $C$  et le sommet  $S$  du dioptré).

Le dioptré sera rigoureusement stigmatique pour le couple  $(A, A')$  lorsque tous les rayons utiles (ceux qui passent par le dioptré) partants de  $A$  donnent des rayons convergents vers  $A'$ . Le principe de Fermat impose alors que la distance optique  $L$  soit constante quel que soit le rayon partant de  $A$  contenu dans l'ouverture du dioptré. Ceci impose que l'onde sphérique divergente issue du point objet  $A$  devienne une onde sphérique convergente vers le point image  $A'$  (image réelle) ou divergente issue de  $A'$  dans le cas d'une image virtuelle.

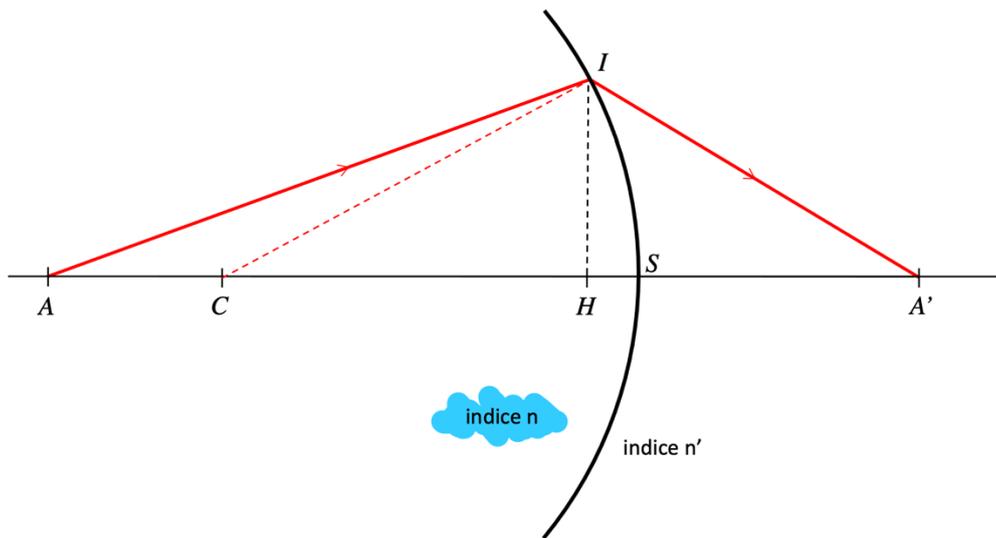


Figure : imagerie dans un dioptre sphérique.

Si on appelle  $I$  le point d'impact d'un rayon sur le dioptre, alors le principe de Fermat s'écrit,

$$L = n\overline{AI} + n'\overline{IA'} = Cte \quad \forall \text{ le point } I$$

Le point  $S$  correspond à l'abscisse  $x = 0$ . On pose  $x = \overline{SH}$ ;  $R = \overline{SC}$ ;  $p = \overline{SA}$ ;  $p' = \overline{SA'}$

Dans le triangle  $AIH$ ,  $AI^2 = AH^2 + HI^2 = (-p + x)^2 + HI^2$

Dans le triangle  $A'IH$ ,  $A'I^2 = A'H^2 + HI^2 = (-p' + x)^2 + HI^2$

Dans le triangle  $CHI$ ,  $HI^2 = CI^2 - CH^2 = R^2 - (-R + x)^2$

Il vient alors,

$$L = n\sqrt{(-p + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2} \pm n'\sqrt{(-p' + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2}$$

$$L = n|p| \sqrt{1 + \frac{2x}{p} \left(\frac{R}{p} - 1\right)} \pm n'|p'| \sqrt{1 + \frac{2x}{p'} \left(\frac{R}{p'} - 1\right)}$$

On prendra un signe (+) si l'image est réelle ( $p' > 0$ ) et (-) si elle est virtuelle ( $p' < 0$ ).

Le chemin optique dépend de l'ouverture (via  $x$ ) et donc la condition de stigmatisme,  $L = Cte$ , n'est en général pas respectée. Elle ne sera atteinte que pour trois cas particuliers.

- Si on impose  $p = R = p' < 0$  alors  $L = Cte$ . L'objet réel, au centre de courbure, a son image virtuelle au même endroit. Un rayon, partant du centre de courbure  $C$ , incident au dioptre n'est pas dévié. Tous les rayons émergents se croisent virtuellement en  $C$ . Le centre de courbure est donc un point singulier stigmatique du dioptre sphérique.

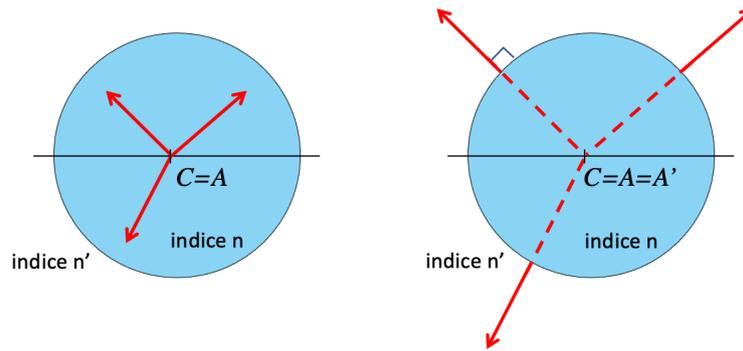


Figure : dioptre sphérique et conjugaison au centre de courbure.

- On linéarise le problème en supposant que  $x$  est petit devant les autres grandeurs caractéristiques du problème.
- On cherche une solution plus générale qui rend  $L$  stationnaire par rapport à  $x$ , soit,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

### Approximation linéaire : les conditions paraxiales

Le stigmatisme rigoureux est très rare. Il est intéressant de voir si en se plaçant dans des conditions de petites ouvertures le dioptre sphérique devient stigmatique. C'est l'objet de l'approximation linéaire suivante où on considère que  $x$  est petit devant les autres grandeurs caractéristiques du problème. En anglais le terme « optique paraxiale » est appelé « first order optics ». Il vient donc au 1<sup>er</sup> ordre,

$$L = n|p| \left( 1 + \frac{x}{p} \left( \frac{R}{p} - 1 \right) \right) \pm n'|p'| \left( 1 + \frac{x}{p'} \left( \frac{R}{p'} - 1 \right) \right)$$

Dans notre exemple, on a  $p < 0$  et  $p' > 0$  donc

$$L = -np + n'p' + x \left( n - n' - R \left( \frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} \right) \right)$$

$L$  devient indépendant de l'ouverture (quel que soit  $x$ ) si,

$$n - n' - R \left( \frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{p} - \frac{n'}{p'} = \frac{n - n'}{R}$$

Si  $p$  et  $p'$  obéissent à cette équation alors le chemin optique est stationnaire vis-à-vis de l'ouverture et on obtient le stigmatisme rigoureux si l'ouverture est faible, c'est-à-dire que le diamètre du dioptre est petit devant les autres grandeurs ( $p$ ,  $p'$  et  $R$ ). Cette condition est dite paraxiale (proche de l'axe). Tous les rayons partants d'un point A sur l'axe convergent tous en un unique point A' sur l'axe.

On a considéré le cas d'un objet réel ( $p < 0$ ) et d'une image réelle ( $p' > 0$ ) mais il existe des solutions pour un objet virtuel ( $p > 0$ ) et une image virtuelle ( $p' < 0$ ). Pour obtenir une conjugaison particulière, il faut positionner l'objet au bon endroit suivant le signe de la courbure.

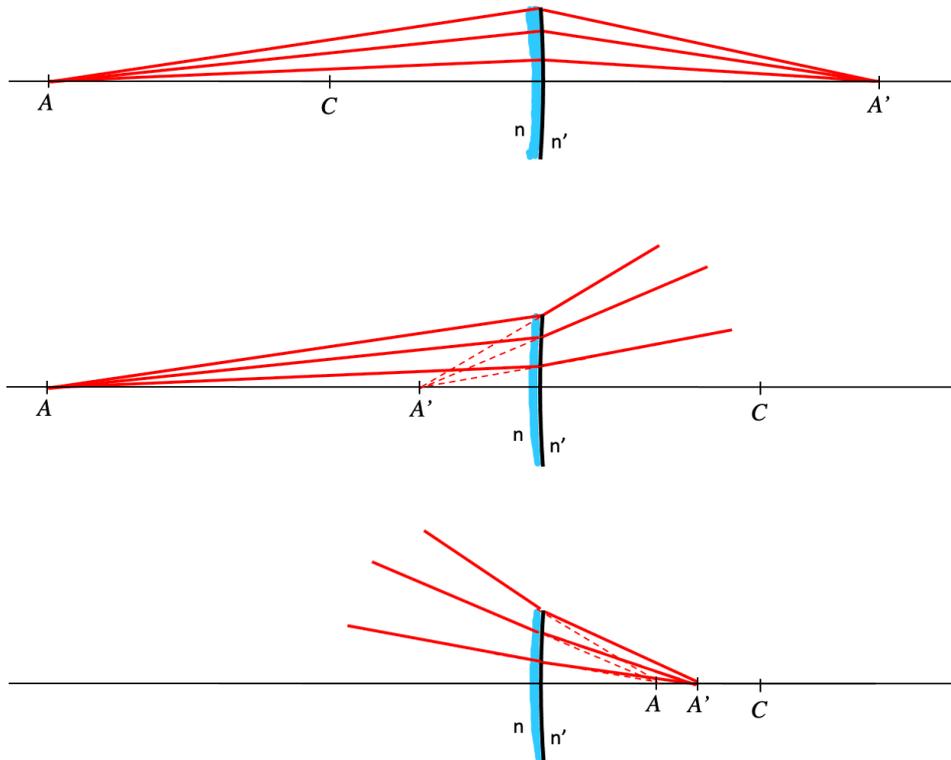


Figure : objet réel/image réelle, objet réel/image virtuelle, objet virtuel/image réelle.

### Aucune approximation : les points d'Young-Weierstrass

On cherche une solution générale qui rend  $L$  stationnaire par rapport à l'ouverture (ici  $x$ ),

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{n \frac{|p|}{p} \left( \frac{R}{p} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{2x}{p} \left( \frac{R}{p} - 1 \right)}} \pm \frac{n' \frac{|p'|}{p'} \left( \frac{R}{p'} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{2x}{p'} \left( \frac{R}{p'} - 1 \right)}} = 0$$

Pour le cas particulier  $x = 0$  on a,

$$n \frac{|p|}{p} \left( \frac{R}{p} - 1 \right) \pm n' \frac{|p'|}{p'} \left( \frac{R}{p'} - 1 \right) = 0$$

Donc pour tout  $x$ , on doit également avoir,

$$\frac{1}{p} \left( \frac{R}{p} - 1 \right) = \frac{1}{p'} \left( \frac{R}{p'} - 1 \right)$$

Ces deux relations imposent alors  $n|p| \pm n'|p'| = 0$ , ce qui est imposé la solution (-) à savoir  $p' < 0$  (image virtuelle). On a donc  $np = n'p'$ . Ce qui au passage impose  $L = 0$  comme pour le centre de courbure.

Il existe donc une solution (unique) qui annule la dérivée de  $L$  par rapport à l'ouverture quelle que soit l'ouverture, qui est,

$$p = \left( \frac{n'}{n} + 1 \right) R$$

$$p' = \left( \frac{n}{n'} + 1 \right) R$$

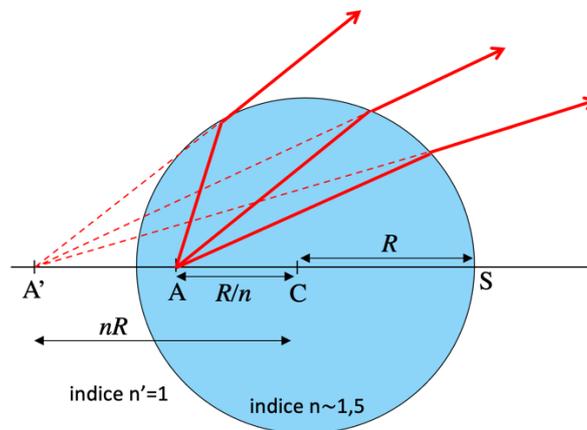


Figure : dioptre sphérique et points d'Young-Weierstrass (cas air-verre dans le visible).

Ces points conjugués sont appelés **points de Young-Weierstrass**. Si l'un est réel alors l'autre est virtuel (car  $p$  et  $p'$  ont même signe). Cette conjugaison spécifique au dioptre sphérique est utilisée dans les objectifs de microscope à très grande ouverture (ménisque, ou demi-boule à immersion).

En dehors de ces points, du centre de courbure et du sommet le stigmatisme n'est plus assuré rigoureusement et des aberrations géométriques apparaissent (négligeables dans les conditions paraxiales). L'image géométrique d'un point n'est pas un point mais une tache. C'est le domaine des aberrations géométriques.

#### 4. Stigmatisme, aplanétisme et relation fondamentale des systèmes optiques

Nous venons de voir que les conjugaisons permettant d'obtenir un stigmatisme rigoureux avec le dioptre sphérique étaient très limitées. En fait les solutions générales du problème  $L = Cte$  sont appelées ovales de Descartes et comme pour le dioptre sphérique (où la constante est nulle), le stigmatisme rigoureux est uniquement obtenu pour des couples de points. Les conjugaisons rigoureusement stigmatiques sur l'axe sont,

- Dioptre elliptique pour la conjugaison infini-foyer (si  $n < n'$ )
- Dioptre hyperbolique pour la conjugaison infini-foyer (si  $n > n'$ )
- Miroir parabolique pour la conjugaison infini/foyer
- Miroir elliptique pour ses foyers

- Miroir hyperbolique pour ses foyers
- Centre de courbure d'un miroir sphérique
- Miroir plan pour tous les points

Certaines de ces conjugaisons (en particulier les miroirs) sont utilisées seules ou combinées entre elles pour la réalisation de systèmes optiques très performants.

Nous avons traité le cas du point sur l'axe de symétrie du dioptré (axe optique). Faire une image c'est également s'intéresser aux points dans le champ, c'est-à-dire dans le plan image mais hors d'axe. Pour faire l'image d'un objet étendu, il est donc nécessaire que le stigmatisme sur l'axe « survive » hors de l'axe (transversalement à l'axe dans un 1<sup>er</sup> temps).

On reprend la situation précédente où notre système est considéré comme stigmatique pour un couple de points (A,A') sur l'axe et on regarde comment évolue la condition lorsque le point A s'éloigne de l'axe vers un point B d'une petite quantité  $dy$ . L'image de B est B', éloignée de  $dy'$  de A' sur l'axe.

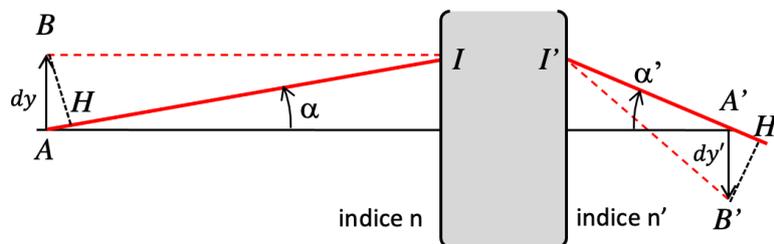


Figure : imagerie aplanétique.

La condition de stigmatisme doit s'appliquer aux points (B,B') ce qui impose que le chemin optique associé soit constant au même titre que (A,A'). On a donc,

$$(AA') - (BB') = Cte$$

On fait intervenir les points d'entrée (I) et de sortie (I') du système optique. Comme  $dy$  est un infinitésimal, on peut faire l'hypothèse que le rayon partant de B, passant par I, ressort également en I'. L'erreur commise est très faible car les distances caractéristiques dans le système optique sont très inférieures à la variation des chemins optiques. Dans le cas d'une seule surface, cette hypothèse n'est pas nécessaire. Nous avons donc,

$$(AI'A') - (BII'B') = Cte \forall (I, I')$$

On peut la réécrire en faisant intervenir les indices et les distances géométriques,

$$nAI + (II') + n'I'A' - \{nBI + (II') + n'I'B'\} = Cte$$

Qui se simplifie,

$$n(AI - BI) + n'(I'A' - I'B') = Cte$$

Dans le cas d'un champ faible (c'est-à-dire AB et A'B' devant les autres longueurs caractéristiques) la différence entre les chemins AI et BI est simplement la projection AH d'un chemin sur l'autre. Il vient alors,

$$nAH - n'A'H' = Cte$$

Que l'on peut réécrire en faisant intervenir les angles d'ouverture  $\alpha$  et  $\alpha'$ .

$$n \times dy \times \sin\alpha - n' \times dy' \times \sin\alpha' = Cte \forall (\alpha, \alpha')$$

Pour une ouverture nulle, la constante est forcément nulle. Donc la relation d'aplanétisme, connue sous le nom de **relation des sinus d'Abbe**, s'écrit,

$$n \cdot dy \cdot \sin\alpha = n' \cdot dy' \cdot \sin\alpha'$$

Un système optique satisfaisant cette relation, maintient son stigmatisme hors (mais proche) de l'axe. Tout système d'imagerie doit satisfaire cette relation. C'est la relation fondamentale des systèmes optiques d'imagerie. Cette relation dit que le produit indice, extension transversale et ouverture est un invariant du système optique. Il se conserve donc à sa traversée. Autrement dit, plus l'image s'éloigne (plus sa taille augmente) plus l'ouverture image diminue. Dans le cadre de l'approximation paraxiale (ou linéaire), la relation des sinus d'Abbe se linéarise et se nomme la relation de Lagrange-Helmholtz ( $ny\alpha = n'y'\alpha'$ ).

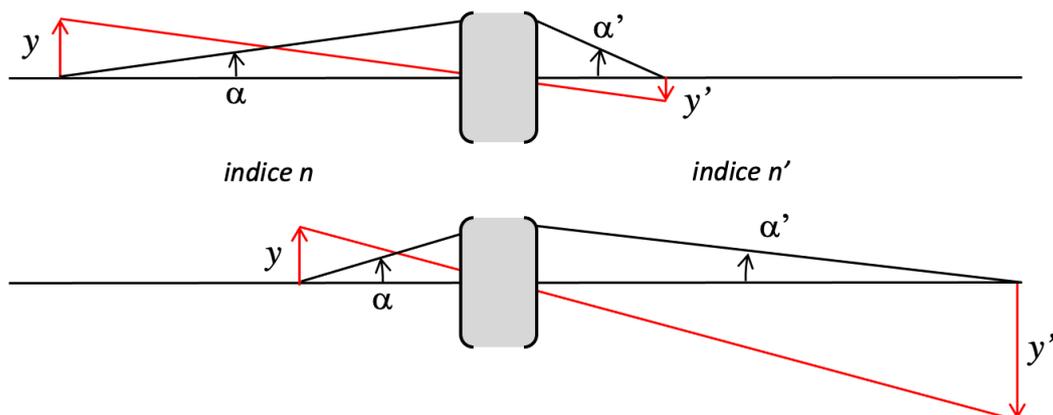


Figure : illustration de la relation fondamentale des systèmes optiques d'imagerie.

Dans le cas du dioptre, si on exprime dans la relation d'Abbe les sinus en faisant intervenir les grandeurs  $\overline{HI}$ ,  $\overline{AI}$ ,  $\overline{A'I}$  on impose que  $\frac{\overline{AI}}{\overline{A'I}} = \frac{n'}{n} = Cte$ . Ceci n'est donc satisfait que si le point  $I$  est sur une sphère. Le centre de courbure (dioptre sphérique et miroir sphérique) et les points d'Young Weierstrass sont donc des conjugaisons aplanétiques. Et tout dioptre non sphérique ne vérifie pas cette relation. Les conjugaisons énoncées plus haut qui étaient stigmatiques pour un couple de points particuliers sur l'axe ne sont donc pas aplanétiques. Il est donc très difficile d'assurer le stigmatisme pour des grandes ouvertures et dans le champ. En dehors des conjugaisons très particulières l'image d'un point sera toujours une tache, même pour des lentilles à forme sphérique ou une lame à faces parallèles, optiques d'usage très courant dans les systèmes optiques complexes.

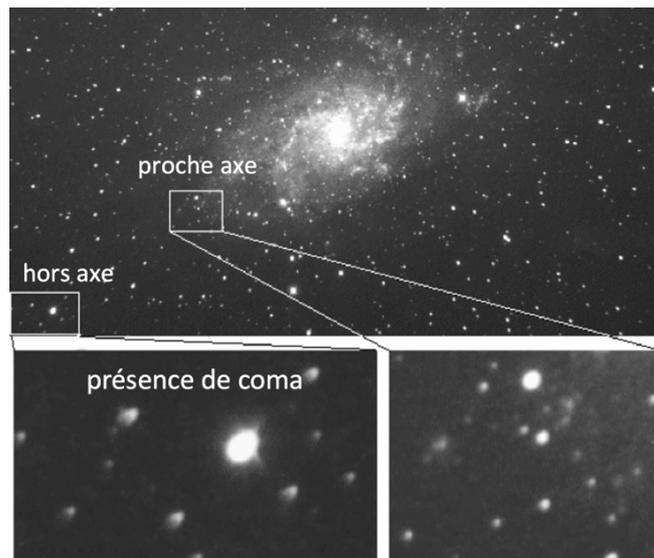


Figure : aberration de coma d'une parabole – crédit : Serge Bertello.

Pour illustrer le non-aplanétisme de la parabole, on peut voir sur le cliché ci-dessus, obtenu avec un télescope de Newton (association d'un miroir parabolique et d'un miroir plan disposé à 45° pour dégager l'image), l'étalement de la tache image des étoiles (en forme d'aigrette) pour celles situées hors de l'axe optique (confondu avec le centre de la galaxie). Ce défaut s'appelle une aberration de coma. Il existe des correcteurs de coma pour supprimer ce défaut classique de ces configurations.

Dans le cas d'une simple lentille plan-convexe le non-stigmatisme apparaît déjà sur l'axe. Ci-dessous le tracé de rayons exact à travers une lentille plan-convexe pour un point sur l'axe (rayons verts) et pour un point hors de l'axe (rayons bleus). On voit effectivement que les rayons sur l'axe (respectivement hors axe) ne convergent pas au même endroit sur l'axe (respectivement hors axe). L'étalement de la tache pour le point sur l'axe se nomme aberration sphérique. Hors axe, l'étalement fait en plus intervenir des aberrations de coma, de l'astigmatisme et de la courbure de champ. Si on retourne la lentille, en disposant sa face plane côté objet, le défaut est encore plus important. On pourra retenir la règle bien connue des opticiens : « plus plat plus près » qui signifie qu'il faut mettre la face la moins courbée de la lentille du côté où le plan conjugué (objet ou image) est le plus près.

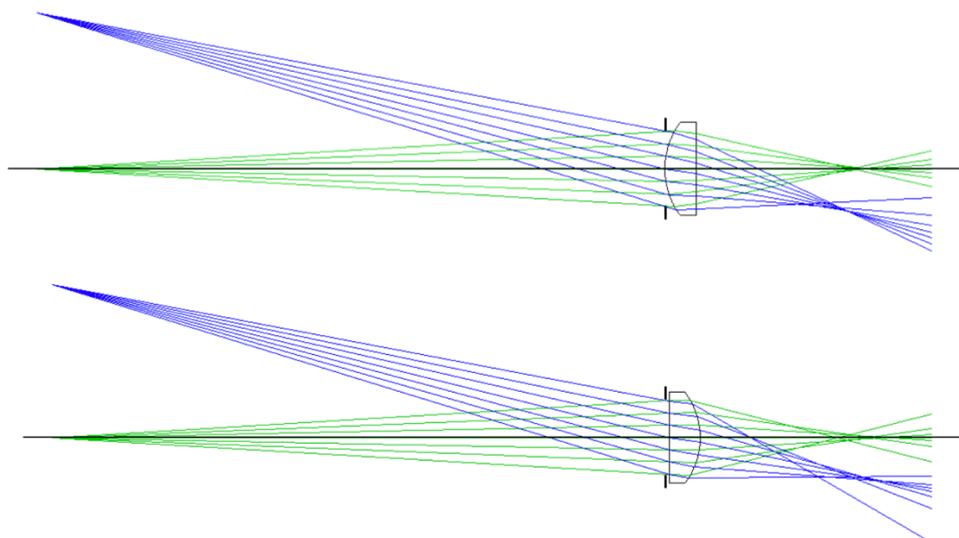


Figure : aberrations dans une lentille plan-convexe.

En revanche, dès qu'on se place dans des conditions paraxiales (petite ouverture et petit champ) on retrouve une conjugaison stigmatique en vertu de l'approximation linéaire. L'image d'un point est un point et l'image d'un plan est un plan. Dans ces conditions, le flux collecté est moins grand (et peut nuire à la détection).

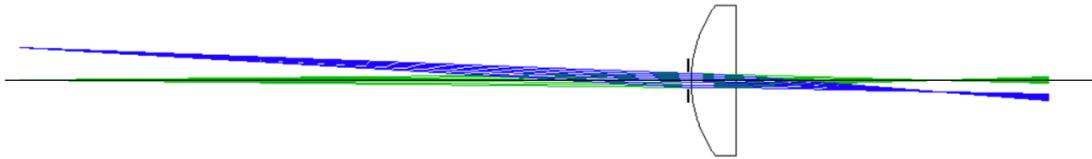


Figure : lentille plan-convexe dans les conditions paraxiales.

L'optique paraxiale permet de définir correctement les paramètres pertinents d'un système optique, comme sa distance focale et permet de construire simplement la trajectoire des rayons. L'optique paraxiale doit être vue comme la 1<sup>ère</sup> étape lors de la conception d'un système optique.

## 5. Foyers et distance focale du dioptre sphérique

Revenons au dioptre sphérique convergent (verre-air par exemple), pour lequel nous avons mis en évidence une relation de conjugaison entre un point objet et un point image,

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{R}$$

avec,  $p = \overline{SA}$ ,  $p' = \overline{SA'}$  et  $R = \overline{SC}$ .

Considérons le point objet sur l'axe à l'infini. Il émet des rayons parallèles à l'axe. D'après la formule de conjugaison, son image se forme en un point particulier **F'**, appelé **foyer image** du dioptre, tel que,

$$p' = \frac{n'}{n' - n} \overline{SC} = f' = \overline{SF'}$$

Les rayons convergent alors tous vers ce foyer **F'**.

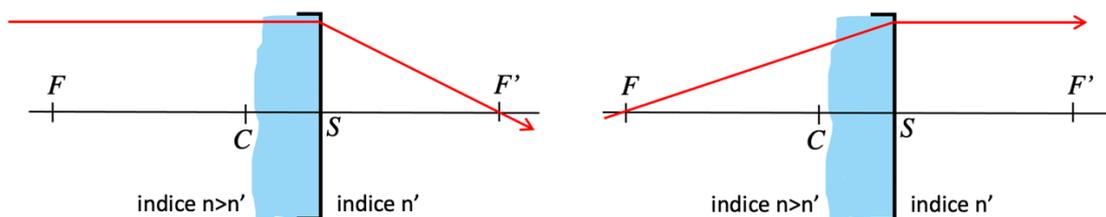


Figure : foyers du dioptre sphérique ( $n=1,5$  et  $n'=1$ ).

Pour obtenir un point image à l'infini, le point objet sera placé au **foyer objet F** à la distance,

$$p = \frac{n}{n - n'} \overline{SC} = f = \overline{SF}$$

Ces deux situations définissent les **distances focales objet**  $f = \overline{SF}$  et **image**  $f' = \overline{SF'}$ . Elles sont simplement liées par les indices,

$$-\frac{f}{n} = +\frac{f'}{n'}$$

Par exemple, dans le cas d'un dioptre verre-air convergent, l'indice du verre vaut environ 1,5 et la distance focale image  $f' = 1,5|f|$ .

Si la distance focale image est positive, le dioptre est dit **convergent**. Si cette distance est négative le dioptre est dit **divergent**. L'inverse de la relation précédente permet d'introduire la **convergence** ou **puissance intrinsèque** du système optique dont l'unité est l'inverse du mètre appelée « dioptrie » (parfois noté  $\delta$ ),

$$P = -\frac{n}{f} = +\frac{n'}{f'}$$

Dans le cas de l'œil, la focale objet vaut environ 16,7 mm (formule du dioptre pour  $n'=1,33$ ) ce qui donne une puissance de  $60\delta$ .

On voit que la distance focale est ici la distance entre le foyer image  $F'$  et un plan situé à l'intersection du rayon incident parallèle (ici ce plan est tangent au sommet  $S$ ) et de son émergent qui passe par  $F'$ . En optique paraxiale, ce plan passe, dans le cas du dioptre (et également dans le cas de la lentille mince), par son sommet.

Si on considère maintenant un point objet situé à l'infini et hors de l'axe optique. On définit alors l'angle  $\theta$  pour caractériser sa position dans le champ objet. L'image de ce point sera située dans le plan focal image à une distance  $y'$  de l'axe optique. D'après le schéma associé et en utilisant les rayons passant par le sommet et par le foyer objet, on a,

$$y' = f' \times \theta' = -f \times \theta$$

Pour un objet à l'infini, la distance focale est le seul paramètre nécessaire pour déterminer la taille de l'image.

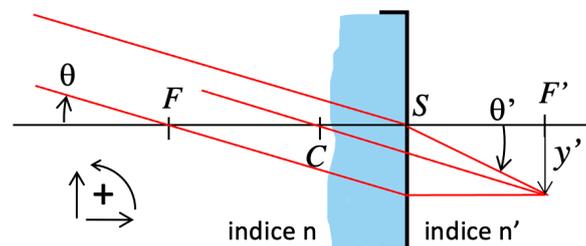


Figure : cas d'un point objet à l'infini dans un dioptre sphérique.

Pour le rayon passant par le sommet, on a de plus  $n\theta = n'\theta'$  ce qui démontre à nouveau la relation entre les distances focale objet et image,

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$

## 6. Foyers et distance focale d'un système centré

On appelle **système centré**, un système composé d'une succession de dioptries et/ou miroirs ayant un axe de symétrie commun, l'axe optique.

Dans le cadre de l'optique paraxiale, si  $A'$  est l'image de  $A$ , alors,

- Deux points  $A$  et  $A'$  sont dit conjugués par le système optique. On note  $A \rightarrow A'$  ;
- L'image d'un point est unique et stigmatique ;
- Tout point  $B$  du plan objet est conjugué en un point  $B'$  du plan image ;
- Pour un plan objet, la position et la taille de l'image sont imposées par la conjugaison ;

On appelle **foyer objet  $F$**  le conjugué d'un point image à l'infini sur l'axe.

On appelle **foyer image  $F'$**  le conjugué d'un point objet à l'infini sur l'axe.

On appelle **plan principal image  $H'$** , le plan orthogonal à l'axe passant par l'intersection du rayon incident parallèle à l'axe et l'émergent passant par le foyer image  $F'$ .

On appelle **plan principal objet  $H$** , le plan orthogonal à l'axe passant par l'intersection du rayon incident passant par le foyer objet  $F$  et émergent parallèle à l'axe.

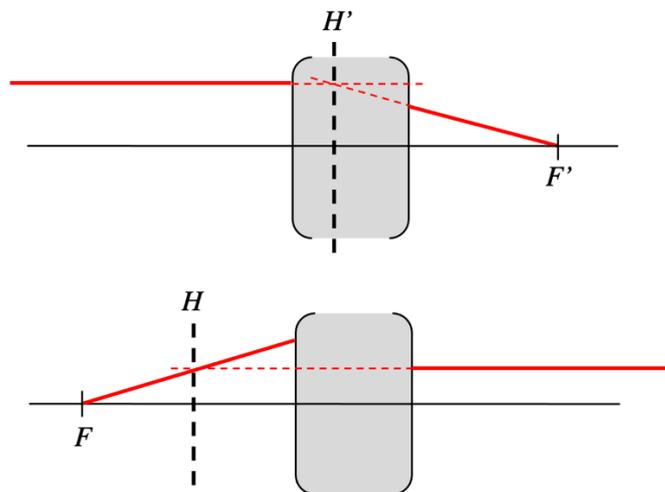


Figure : plans principaux d'un système optique centré.

Si on choisit un rayon quelconque (rayon double flèche sur le schéma ci-après) passant par  $F$  et passant par  $I$  le point d'intersection entre le rayon incident parallèle à l'axe et le plan  $H$ , on voit que ces deux rayons émergent ensemble au point  $I'$  dans le plan  $H'$  et à même hauteur que le point précédent. Cela démontre que  $H$  et  $H'$  sont des plans conjugués par le système avec un grandissement transversal  $+1$  ( $\overline{HI} = \overline{H'I'}$ ). Si l'objet est en  $H$  alors son image est en  $H'$  et de même taille.

Remarque : dans cet exemple,  $H$  est avant  $H'$  mais ils peuvent être n'importe où.

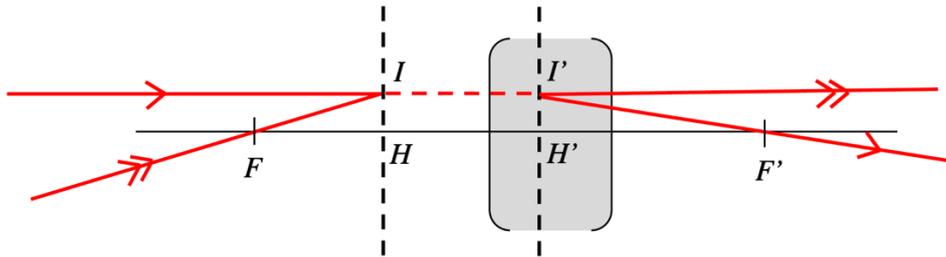


Figure : passage entre deux plans principaux.

Dans le cas d'un point situé à l'infini et hors de l'axe défini par l'angle  $\theta$ , la construction suivante à travers un système, représenté par ses plans principaux, montre que,

$$y' = \overline{H'F'} \times \theta' = -\overline{HF} \times \theta$$

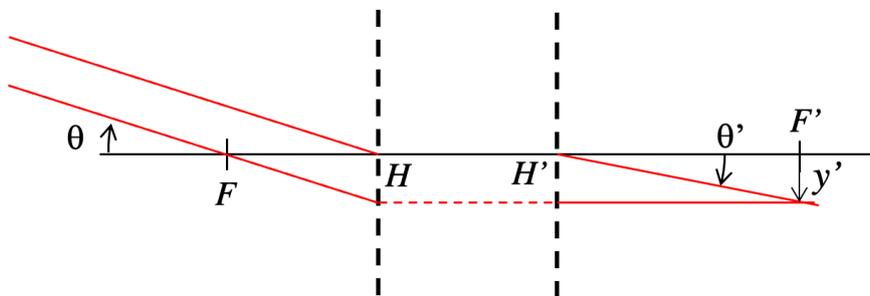


Figure : cas d'un objet à l'infini dans un système centré.

**La distance focale objet (respectivement image) est donc la distance algébrique entre le plan principal objet (respectivement image) et le foyer objet (respectivement image) :**

$$f = \overline{HF} ; f' = \overline{H'F'}$$

En utilisant la relation de Lagrange-Helmholtz ( $ny\alpha = n'y'\alpha'$ ) sur les plans principaux on a, d'après le schéma ci-dessous,

$$n\alpha = n'\alpha'$$

En faisant intervenir les distances focales dans les triangles HFB et HF'B',

$$n \frac{y}{f} = n' \frac{y}{-f'} \quad \rightarrow \quad \frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}$$

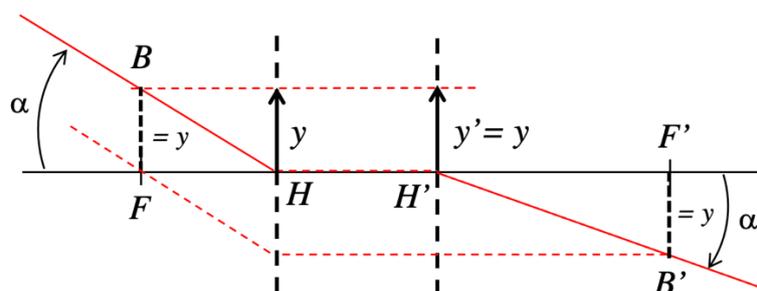


Figure : relation entre focale objet et image.

On peut définir également une puissance pour le système qui est identique à celle du dioptre.

$$P = -\frac{n}{f} = +\frac{n'}{f'}$$

La position et l'écartement des plans principaux dépendent de la lentille ou du système centré utilisé. Dans une lentille mince, les plans H et H' sont confondus avec le plan de la lentille. Si la lentille est épaisse, les plans principaux ne sont plus superposés. Dans un objectif plus complexe les plans principaux peuvent être hors de la zone des lentilles. De plus il est très important de ne pas confondre la distance focale et le tirage, distance entre la dernière lentille et le plan image.

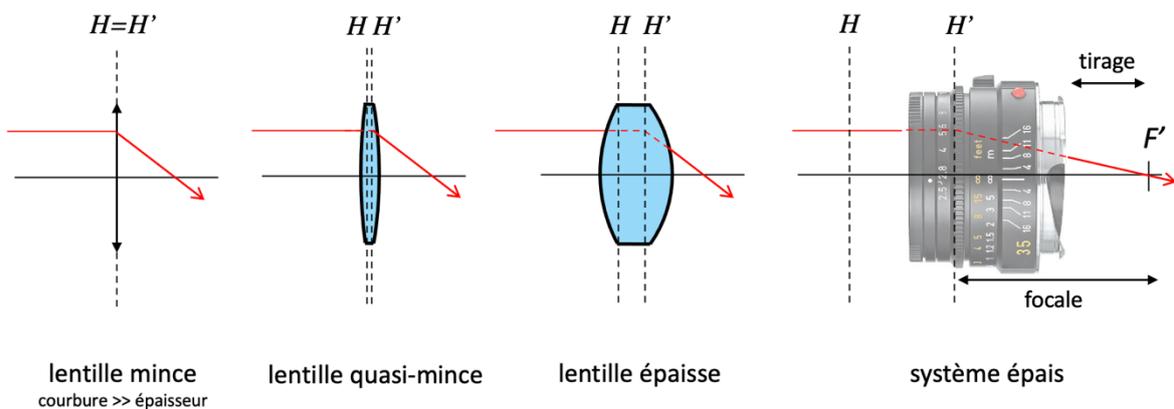


Figure : les plans principaux dans différents systèmes optiques.

On peut se demander maintenant s'il existe un point particulier du système centré pour lequel un rayon objet passant par ce point faisant un angle  $\theta$  avec l'axe donnerait un rayon image faisant le même angle avec l'axe, comme le centre de courbure d'un dioptre/miroir ou le centre optique d'une lentille mince.

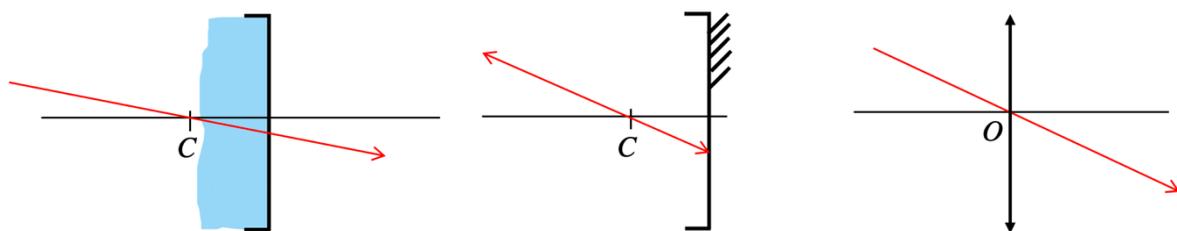


Figure : rayon non dévié dans un dioptre, miroir et lentille mince.

Dans un système centré quelconque de distance focale objet et image différente ( $n \neq n'$ ), le rayon passant par le point sur l'axe du plan principal objet H ne ressort pas avec le même angle sur le point sur l'axe du plan principal image H'. Si l'indice d'entrée et sortie sont identiques alors le rayon n'est effectivement pas dévié (angulairement) et les intersections des plans principaux avec l'axe jouent donc le rôle de points singuliers (comme le centre optique d'une lentille).

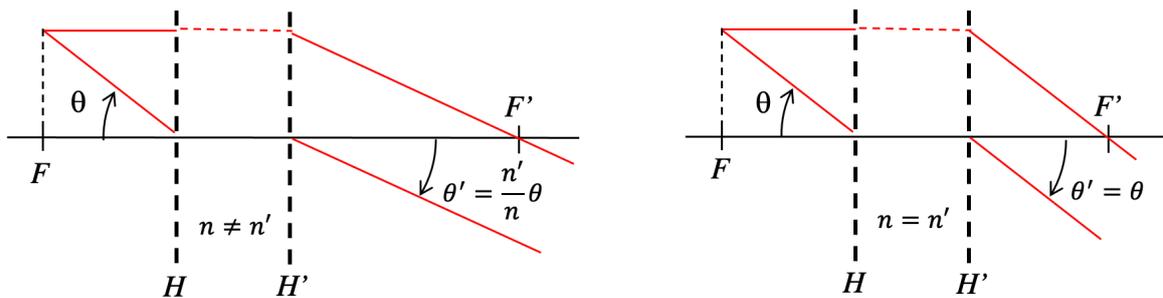


Figure : conjugaison foyer-infini.

Dans le cas général (ci-dessous), on peut trouver en partant du schéma ci-dessus à gauche, un rayon (vert) passant par un point sur l'axe (ici en N) qui ressort non dévié (angulairement) en N'. Les points sur l'axe N et N' sont appelés **points nodaux** objet et image.

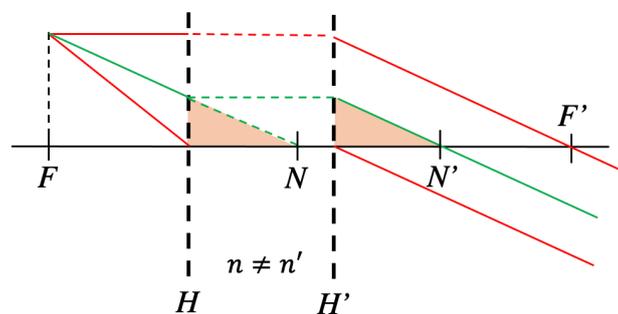


Figure : points nodaux.

En utilisant les triangles semblables, on a de plus l'égalité suivante :  $\overline{NN'} = \overline{HH'}$ . Cette distance se nomme « **interstice** » du système optique.

Un système centré sera dit « **minces** » si la distance  $\overline{HH'}$  est petite devant la distance focale. Au contraire un système est « épais » si  $\overline{HH'}$  est grande devant la distance focale.

Remarques :

- Pour la lentille mince dans un milieu donné, les plans principaux et les points nodaux sont confondus avec le plan de la lentille.
- Pour un miroir sphérique, les plans principaux sont confondus avec la surface du miroir et ses points nodaux sont confondus avec le centre de courbure. Les foyers objet et image sont également confondus. D'après la formule de la focale du dioptré,

$$\overline{SF'} = \frac{-n'}{n - n'} \overline{SC}$$

Dans un miroir pour assurer la relation générale  $\frac{\overline{HF}}{n} = -\frac{\overline{HF'}}{n'}$  l'indice de sortie doit être l'opposé de l'indice d'entrée. C'est en fait la conséquence du changement d'orientation du rayon réfléchi par rapport au rayon incident. On a donc,

$$\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF}$$

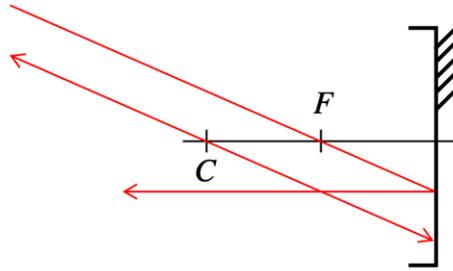


Figure : tracés dans un miroir sphérique.

La construction géométrique de l'image d'un objet à travers un système représenté par ses plans principaux utilise les mêmes techniques que celles utilisées avec une lentille mince. Les règles sont les suivantes,

- On lance au moins deux rayons d'un même point objet. Trois c'est mieux pour éviter une erreur. Le point image est à l'intersection des rayons émergents au système.
- Un rayon partant du point objet se propage jusqu'au plan principal objet  $H$ . Puis on applique une « translation » horizontale jusqu'au plan principal image  $H'$ . Le rayon peut poursuivre sa marche vers le point image conjugué du point objet choisi.
- Si le rayon incident est parallèle à l'axe optique, il sort du système en croisant l'axe optique en  $F'$ .
- Si le rayon incident croise l'axe optique en  $F$ , il sort du système parallèle à l'axe optique.
- Tout rayon passant par le point nodal objet ressort au point nodal image avec la même inclinaison.
- Pour tracer la marche d'un rayon quelconque, il faut s'aider d'un rayon parallèle à ce dernier et passant par un point remarquable. Après passage des plans principaux ce second rayon coupe le plan focal image en un point où passera le rayon utile.

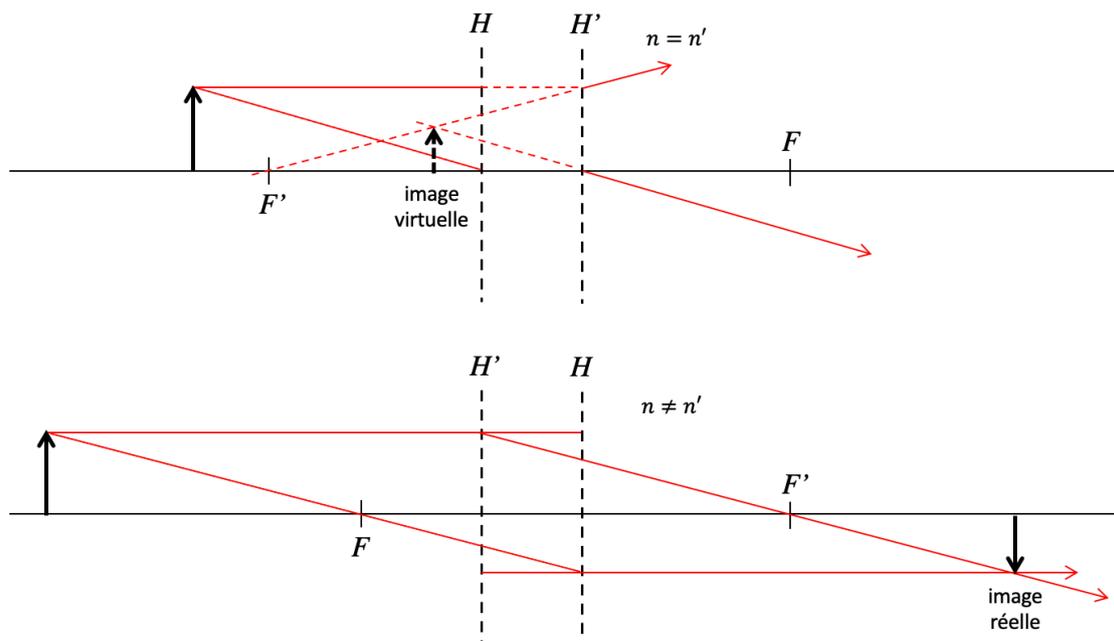


Figure : exemples de construction d'image à travers un système centré.

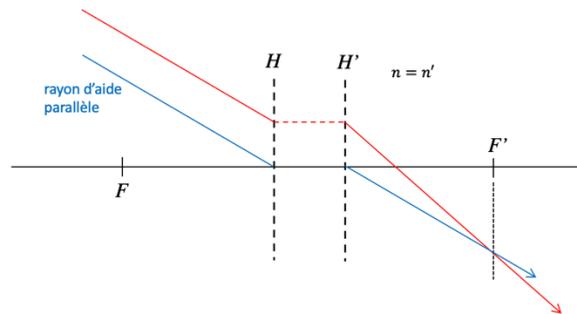


Figure : exemple de construction de la marche d'un rayon quelconque (rouge) à travers un système centré.

## 7. Conjugaison à distances finies

Les positions de l'objet et de son image sont reliées à la distance focale par la formule de conjugaison. A une position de l'objet correspond une valeur de grandissement.

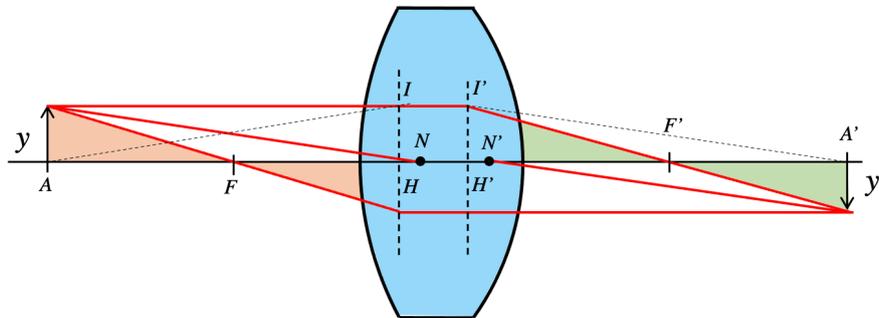


Figure : points cardinaux d'une conjugaison à distance finie dans une lentille bi-convexe.

On montre que les formules de conjugaison aux plans principaux et aux foyers s'écrivent,

$$-\frac{n}{\overline{HA}} + \frac{n'}{\overline{H'A'}} = \frac{n'}{\overline{H'F'}} = -\frac{n}{\overline{HF}}$$

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = f \times f'$$

En utilisant les triangles semblables (orange et vert sur la figure), la relation de Lagrange-Helmholtz (trait noir pointillé) et le rayon passant par N,N', on retrouve les formules du grandissement transversal,

$$g_y = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{N'A'}}{\overline{NA}}$$

Un objectif photographique en usage traditionnel travaille dans un régime de grandissement inférieur à 1 (objet loin). Un objectif dédié à la macrophotographie travaille usuellement avec un grandissement de 1 ou 0,5 (petit objet à 2 ou 3 fois la distance focale). Un objectif de microscope travaille avec un fort grandissement (objet très proche du foyer).

En différentiant la formule de conjugaison aux plans principaux, on détermine le grandissement longitudinal (applicable uniquement pour des petits déplacements) pour une conjugaison de grandissement transversal donné,

$$n \frac{d\overline{HA}}{\overline{HA}^2} - n' \frac{d\overline{H'A'}}{\overline{H'A'}^2} = 0 \leftrightarrow \frac{d\overline{H'A'}}{d\overline{HA}} = \frac{n}{n'} \times \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{n \overline{H'A'}}{n' \overline{HA}}\right)^2$$

$$g_z = \frac{n'}{n} g_y^2$$

Le grandissement longitudinal est toujours positif dans un système dioptrique. Si l'objet se déplace vers la gauche alors son image se déplace également vers la gauche. Dans un miroir, le grandissement est toujours négatif car l'indice « vu » par le rayon réfléchi est l'inverse de celui « vu » par le rayon incident.

## 8. Conjugaison infini-foyer et foyer-infini

Lorsque l'objet est situé à l'infini, on le caractérise par l'angle  $\theta$  sous lequel il est vu depuis l'instrument. La taille de l'image, placée au foyer image  $F'$ , a pour expression,

$$y' = -f \times \theta = f' \times \theta'$$

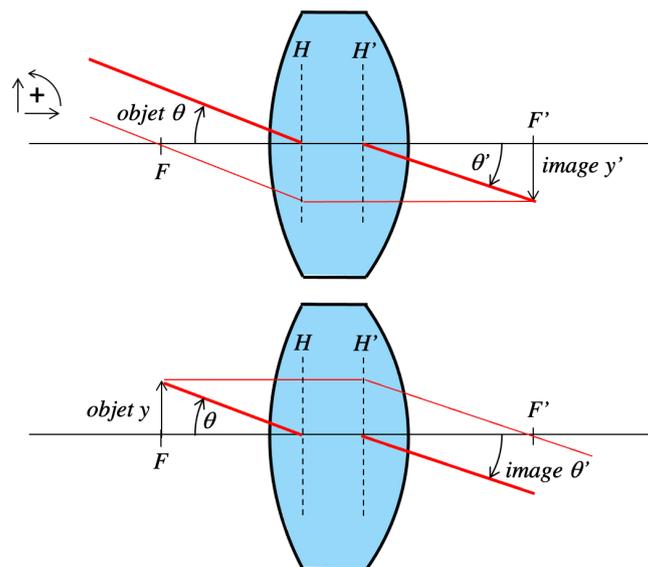


Figure : conjugaison foyer-infini et infini-foyer.

Le miroir primaire d'un télescope et l'œil au repos et sans défaut travaillent dans cette conjugaison.

Inversement, quand l'objet de taille  $y$  est placé au foyer objet d'un système, son image est rejetée à l'infini et est de taille angulaire,

$$\theta' = \frac{n'}{n} \theta = -\frac{n' y}{n f} = -\frac{y}{f'}$$

Un oculaire dans un microscope ou un télescope, une loupe, un collimateur travaillent dans cette conjugaison.

La collimation est l'action de minimiser la divergence des rayons provenant d'une source. Elle est obtenue en plaçant la source au foyer d'un système optique (son image est donc rejetée à l'infini). En revanche la divergence ne sera jamais nulle même pour une source ponctuelle en raison du phénomène de diffraction. Pour parvenir à une collimation idéale, il faut réduire la taille de la source (éventuellement en la diaphragmant) ou augmenter la distance focale du système optique, mais ce sera toujours au détriment d'une perte de flux transmis.

$$\text{divergence} = \frac{\text{diamètre source}}{\text{focale}}$$

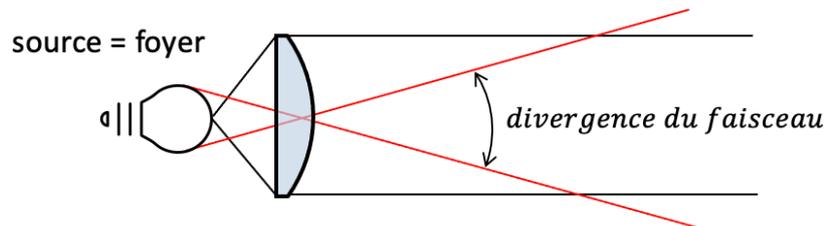


Figure : collimation d'un faisceau lumineux.

### 9. Conjugaison infini-infini – système afocal

Pour un système afocal (ce qui veut dire « sans foyers »), un rayon parallèle à l'axe ressort parallèle à l'axe. Autrement dit, si l'objet est à l'infini, son image l'est aussi. Le grandissement est angulaire. On définit de **grossissement**  $G$ . Il est défini comme le rapport entre l'angle sous lequel est vu l'image et l'angle sous lequel est vu l'objet. Ce grossissement est inversement proportionnel au grandissement transversal entre les diamètres  $\phi$  et  $\phi'$ . On notera que ce dernier est constant quelle que soit la position de l'objet contrairement à un système focal.

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\phi}{\phi'}$$

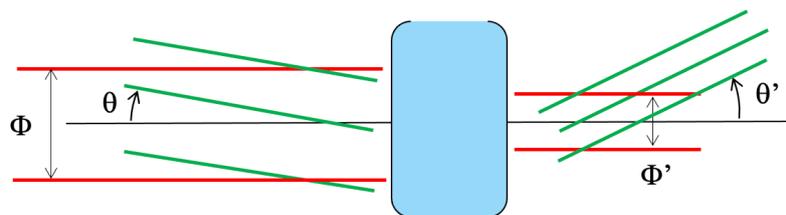


Figure : système afocal.

Une lunette pour l'observation astronomique est un système afocal. La jumelle d'observation terrestre l'est également. Le système optique est l'association d'un objectif qui forme l'image d'un objet lointain dans son plan focal. L'image intermédiaire formée est placée au foyer objet d'un oculaire qui rejette à nouveau son image à l'infini pour que l'œil puisse l'observer sans accommodation. Le diamètre apparent de l'image ainsi formée est augmenté.

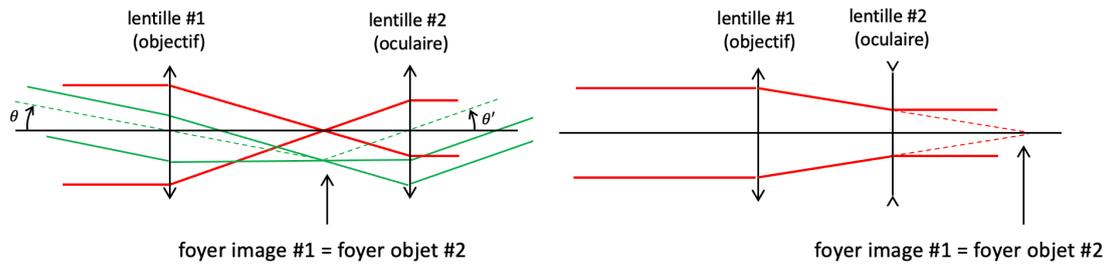


Figure : lunette afocale de type « Kepler » (gauche) et de type « Galilée » (droite).

L'objectif formera l'image d'un objet à l'infini, de taille apparente  $\theta$  à son foyer et aura une taille,

$$y' = f'_{\text{objectif}} \times \theta$$

Cette image sera ensuite imagée à l'infini par l'oculaire avec une taille apparente

$$\theta' = \frac{-y'}{f'_{\text{oculaire}}} = -\frac{f'_{\text{objectif}}}{f'_{\text{oculaire}}} \times \theta.$$

Le grossissement de la lunette est donc simplement le rapport de la focale de l'objectif et de l'oculaire.

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f'_{\text{objectif}}}{f'_{\text{oculaire}}}$$

Pour obtenir un grossissement important il faut donc que la focale de l'objectif soit beaucoup plus grande que celle de l'oculaire. Le signe du grossissement est négatif donc l'image est donc inversée. Cela n'a pas d'importance dans une lunette pour l'astronomie. Dans une paire de jumelles l'image est à nouveau inversée grâce à des réflexions dans des prismes. Dans une lunette terrestre, l'inversion est obtenue en insérant entre l'objectif et l'oculaire une lentille qui effectue une conjugaison de grandissement  $-1$ . Une paire de jumelles permet essentiellement d'observer des objets lointains mais la distance entre l'objectif et l'oculaire peut varier pour observer des objets proches. C'est donc bien le grossissement qui est la grandeur inscrite sur le corps d'une paire de jumelles. Un système afocal peut également servir à agrandir des faisceaux laser collimatés. Ces agrandisseurs de faisceau fonctionnent à l'inverse d'une paire de jumelles et le grandissement vaut donc l'inverse du grossissement calculé précédemment.

$$g_y = \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{f'_{\#2}}{f'_{\#1}} = \frac{1}{G}$$

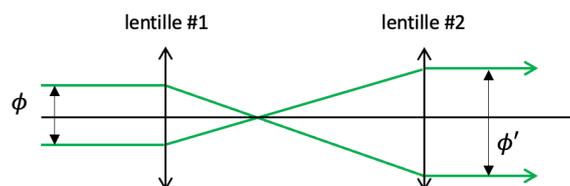


Figure : système afocal en mode « agrandisseur de faisceau »



Figure : jumelles de grossissement  $\times 10$  ; agrandisseur de faisceau laser  $\times 10$  – crédits : Leica / Cloudray

### 10. Association de deux systèmes centrés

La puissance de l'association de deux systèmes centrés non accolés de puissance connue est déterminée par la **formule de Gullstrand**,

$$P = \frac{n'}{f'} = P_1 + P_2 - \frac{e}{n_{\text{int}}} \times P_1 \times P_2$$

Si les deux systèmes sont minces et dans le même milieu, la formule de Gullstrand se simplifie,

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 \times f'_2}$$

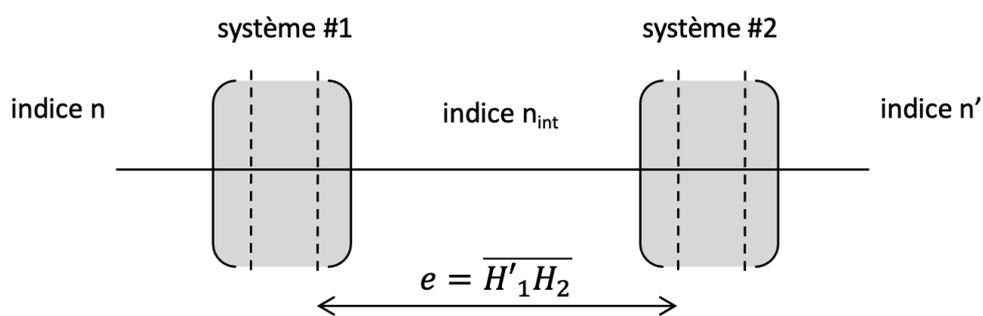


Figure : association de deux systèmes centrés.

## B. Limitations des faisceaux

Un système optique est constitué d'éléments ayant une taille finie. De fait, cela limitera l'étendue des faisceaux utiles qui traversent l'instrument jusqu'au capteur. Cette limitation aura deux conséquences que nous allons étudier en détail, à savoir,

- Une limitation de l'ouverture
- Une limitation du champ

Ces limitations géométriques auront un impact sur la qualité de l'image et sur la quantité de lumière dans l'image. Nous aborderons également ces points par la suite.

Le **faisceau utile** est le faisceau de plus grande étendue, c'est-à-dire le plus ouvert, qui traverse tous les diaphragmes matériels (diaphragmes, bords de lentilles/miroirs, éventuellement pupille de l'œil). Les instruments étant centrés, les faisceaux ont des formes coniques ou cylindriques. L'angle d'ouverture objet/image correspond à l'angle du rayon le plus incliné qui entre dans (respectivement sort de) l'instrument pour un point de l'objet placé sur l'axe optique. Dans le cas d'un objet (respectivement une image) à l'infini, l'ouverture est définie par la distance à l'axe optique du rayon parallèle le plus éloigné. Dans le cas d'une lentille mince, il est facile de définir les grandeurs d'ouverture.

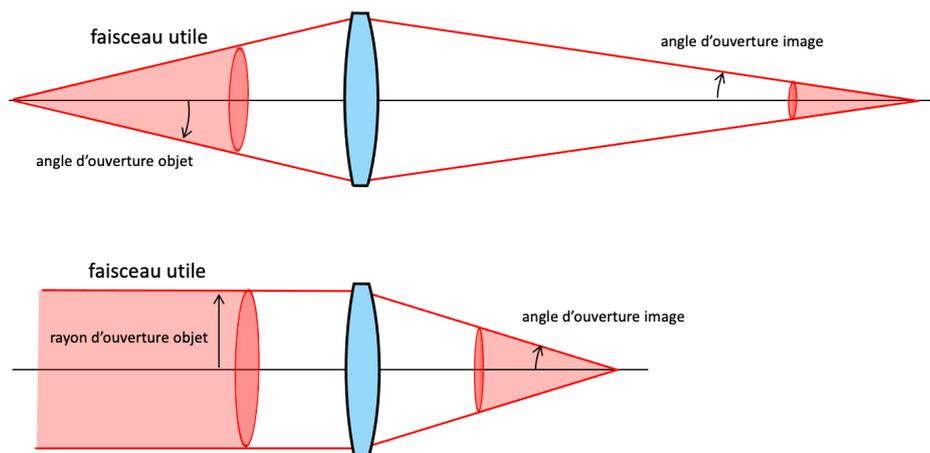


Figure : limitation du faisceau par une lentille dans une conjugaison fini-fini et infini-foyer.

Dans le cas d'un système composé de plus de deux éléments, il convient de préciser la définition d'ouverture, car le premier élément n'est pas forcément celui qui la limite.

### 1. Notion de pupille

L'élément physique dans un système optique (lentille, miroir, diaphragme) qui limite l'ouverture des rayons pour un point objet sur l'axe s'appelle le **diaphragme d'ouverture**. Le terme **pupille du système** ou simplement **pupille** est également utilisé (en anglais, **aperture stop**). Elle est unique.

Dans une paire de jumelles, la pupille est souvent l'objectif (1<sup>ère</sup> lentille), de même dans un grand télescope, la pupille est souvent le miroir primaire car c'est le plus cher à réaliser. Dans un objectif photographique, l'ouverture est définie par le diaphragme à lamelles situé à

l'intérieur du corps métallique. Dans un microscope la pupille est un diaphragme placé au foyer image de l'objectif.

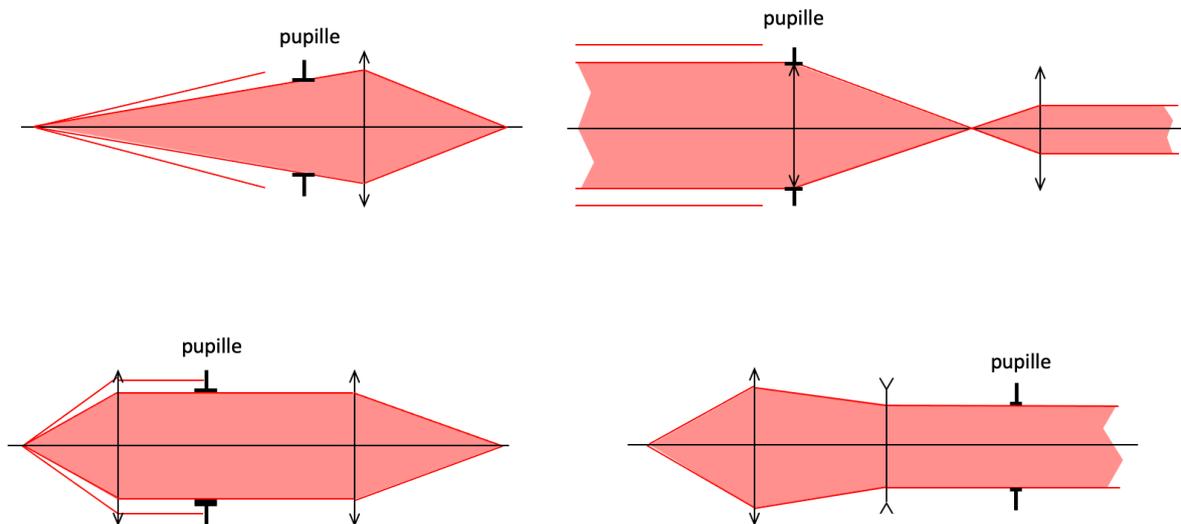


Figure : exemples de systèmes optiques avec leur pupille.

Si cette pupille appartient à l'espace objet (espace d'entrée) elle est la **pupille d'entrée** notée **PE**. Si cette pupille appartient à l'espace image (espace de sortie) elle est la **pupille de sortie** notée **PS**.

Si cette pupille n'est pas dans l'espace d'entrée (respectivement, dans l'espace de sortie) de l'instrument, on peut définir une **pupille d'entrée** (respectivement, une **pupille de sortie**) qui est le conjugué de la pupille par les éléments qui le précèdent (respectivement, qui le suivent).

Par définition on a  $PE \xrightarrow{\text{s.o. amont}} \text{Pupille}$  et  $\text{Pupille} \xrightarrow{\text{s.o. aval}} PS$ . Cela implique nécessairement que la pupille d'entrée et la pupille de sortie sont conjuguées par tout le système optique.

$$PE \xrightarrow{\text{s.o.}} PS$$

**On notera que ce n'est pas la même conjugaison que celle qui lit l'objet et l'image.** Il ne faut donc pas utiliser les mêmes grandeurs comme le grandissement ou le grossissement.

$$A \xrightarrow{\text{s.o.}} A'$$

Sur les exemples ci-dessus, on a d'après les définitions précédentes,

Schéma	Pupille	Pupille d'entrée	Pupille de sortie
haut-gauche	diaphragme	diaphragme	image du diaphragme par la lentille
haut-droite	1 <sup>ère</sup> lentille	1 <sup>ère</sup> lentille	image de la 1 <sup>ère</sup> lentille par la seconde lentille
bas-gauche	diaphragme	Antécédent du diaphragme par la 1 <sup>ère</sup> lentille	image du diaphragme par la 2 <sup>ème</sup> lentille
bas-droite	diaphragme	antécédent du diaphragme par les deux lentilles	diaphragme

D'un point de vue de la construction géométrique des faisceaux, un rayon partant de l'objet qui s'appuie sur la pupille d'entrée (qu'elle soit réelle ou virtuelle) s'appuie également sur la pupille du système et la pupille de sortie conjuguées. La pupille d'entrée limite l'ouverture des rayons partants de l'objet et la pupille de sortie limite l'ouverture des rayons construisant l'image. Autrement dit, la pupille d'entrée est l'élément vu sous le plus petit angle de l'objet et la pupille de sortie est l'élément vu sous le plus petit angle de l'image.

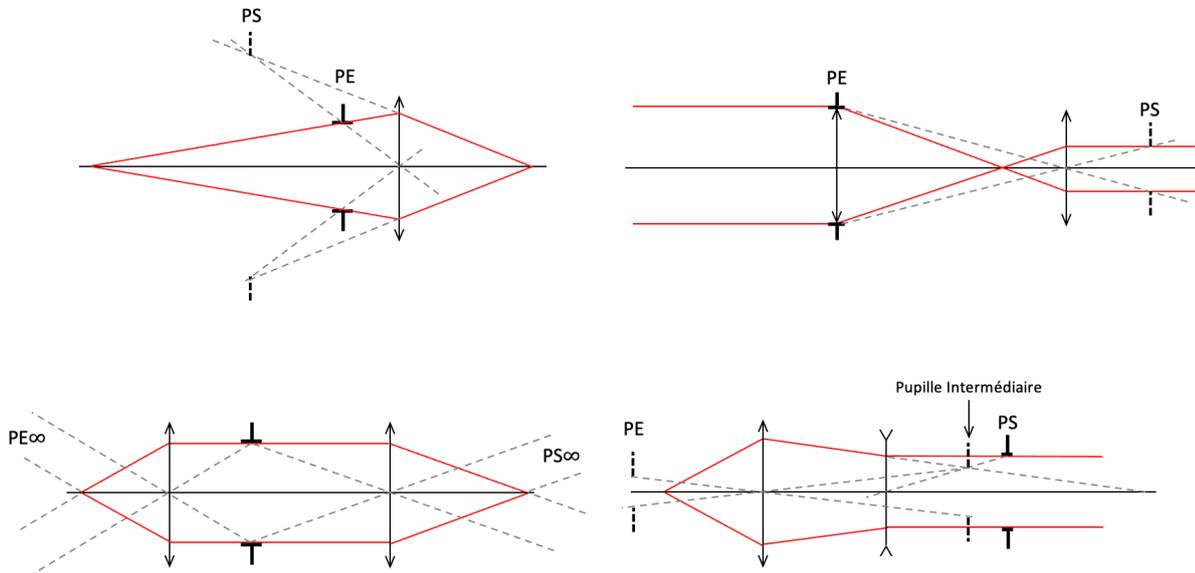


Figure : constructions des pupilles d'entrée et de sortie dans les systèmes étudiés précédemment.

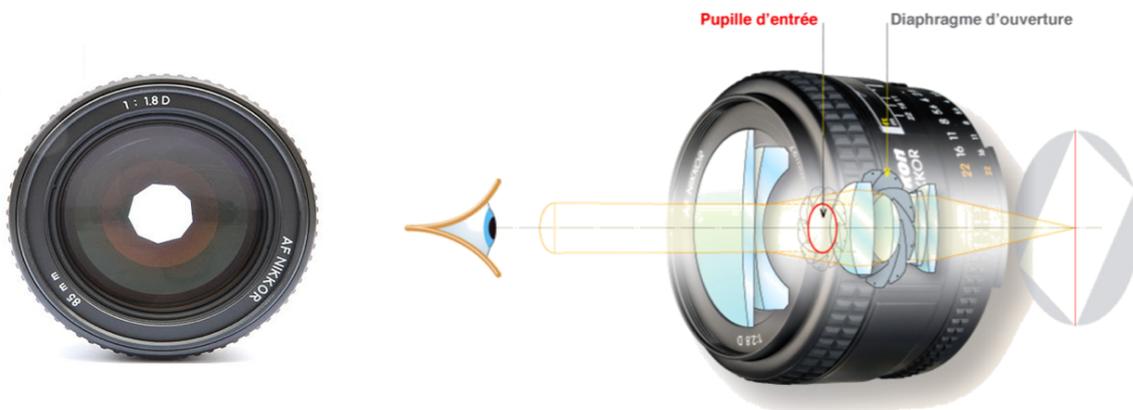


Figure : regarder l'image du diaphragme d'un objectif photographique par sa face d'entrée c'est regarder la pupille d'entrée – crédit : Nikon (gauche) ; Pierre Toscani (droite).

Remarque : dans un système optique composé de plusieurs lentilles (centrées), un rayon délimité par deux lentilles (dioptries) consécutives est alors défini dans un **espace**. Un diaphragme ne définit pas un espace car il ne dévie pas les rayons. Dans un espace défini, les rayons ne sont jamais déviés. Les lentilles appartenant à cet espace deviennent de simples diaphragmes (pour ce rayon). Pour étudier le système dans un unique espace, les éléments (lentilles, diaphragme) n'y appartenant pas doivent y être ramenés par conjugaison à travers les éléments dioptriques/réfléctifs disposés entre l'élément en question et l'espace défini.

## 2. Ouverture Numérique et Nombre d'Ouverture

La notion de pupille permet de définir deux grandeurs très importantes dans les systèmes optiques d'imagerie, l'ouverture numérique objet  $ON_{objet}$  et le nombre d'ouverture  $N$ . Nous verrons que les deux sont liés en conjugaison infini-foyer pour un système aplanétique.

L'**ouverture numérique** est définie dans un espace donné. Dans l'espace objet c'est le produit de l'indice du milieu correspondant et du sinus de l'angle d'ouverture qui s'appuie entre l'axe optique et le rayon partant de l'objet sur l'axe et le bord de la pupille d'entrée. Dans l'espace image c'est le produit de l'indice du milieu correspondant et du sinus de l'angle d'ouverture qui s'appuie entre l'axe optique et le rayon partant du bord de la pupille de sortie et le point image sur l'axe.

$$ON_{objet} = n \times \sin\alpha \quad ; \quad ON_{image} = n' \times \sin\alpha'$$

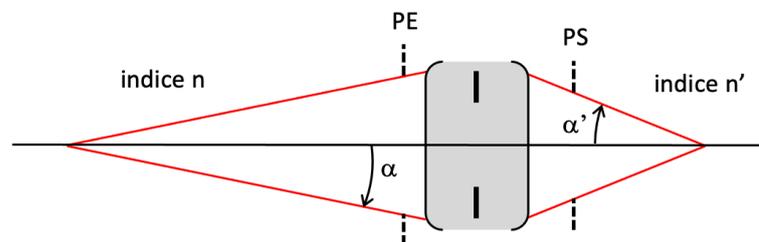


Figure : ouverture numérique objet et image d'un système optique.



Remarque : Dans un objectif de microscope la conjugaison objet-image est contrainte par le tube du microscope. L'objet est donc positionné à une distance frontale fixe et la qualité (liée à l'ouverture) est optimisée pour cette conjugaison. L'ouverture numérique objet est fixe et est donc inscrite sur le corps de l'objectif :  $ON_{objet} = 0,85$  sur l'image.

Figure : Objectif de microscope de grandissement 60 et ouvert à 0,85 – crédit : AmScope.

On remarquera que l'ouverture numérique est directement présente dans la relation d'aplanétisme vue plus haut (relation des sinus d'Abbe).

$$n \cdot dy \cdot \sin\alpha = n' \cdot dy' \cdot \sin\alpha'$$

Cette expression peut se réécrire en faisant intervenir le grandissement transversal,

$$ON_{objet} = g_y \times ON_{image}$$

Lorsque le point objet tend vers l'infini, la relation des sinus s'écrit,

$$-n \cdot AP \times \theta \cdot \frac{h}{AP} = n' \cdot f' \times \theta' \cdot \sin\alpha'$$

Soit la relation spécifique à la conjugaison infini-foyer,

$$\frac{h}{f/n} = \frac{1}{2N} = n' \cdot \sin\alpha'$$

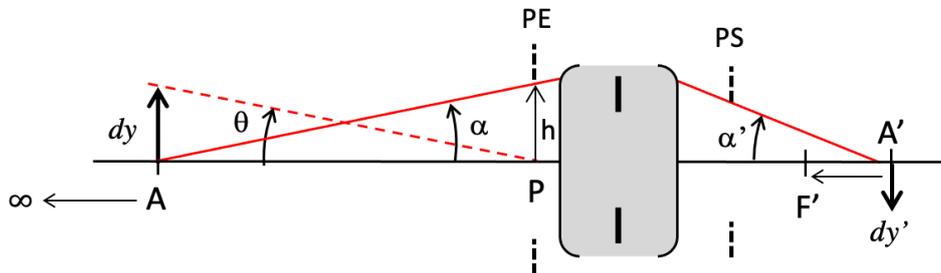


Figure : cas de la conjugaison infini-foyer.

On appelle **nombre d'ouverture** (en anglais **stop number** ou **f-number**) le rapport entre la distance focale et le diamètre de la pupille d'entrée du système optique. Il est uniquement défini dans l'espace objet pour un système en conjugaison infini-foyer. Le cas usuel est un indice d'entrée proche de 1, on a,

$$N = \frac{\text{distance focale (objet)}}{\text{diamètre pupille d'entrée}}$$

On dit qu'un objectif est « ouvert à f sur N ». Le terme anglais est justement « f-number », qu'on peut voir écrire directement F2.8 pour N=2,8.

Remarque : Un objectif photographique « ouvert à f/1.4 » est un objectif pour lequel N=1.4 (longueur focale 1,4 fois plus grande que le diamètre de la pupille d'entrée). Cette grandeur est inscrite sur les objectifs (ou accessible dans les menus de l'appareil). Plus le nombre d'ouverture est grand et plus l'objectif est fermé.

Figure : objectif ouvert à son maximum (ici N=1.4) - crédit : Leica.



### 3. Champ transversal – notion de lucarne

Le **champ transversal** à l'axe optique (en anglais, **field of view**, FOV) correspond à l'ensemble des points de la scène (orthogonale à l'axe optique) imagée à travers le système optique. Il peut s'exprimer par des longueurs au niveau de l'objet (ou de l'image), si celle-ci est à distance finie ou par des angles si elle est à l'infini. On parle de champ objet ou de champ image. On peut distinguer le **champ limité par l'optique**, défini par les éléments du système optique, et le **champ limité par le capteur**. Le plus petit des deux fixera le champ de tout l'instrument (optique + capteur). Bien évidemment il faudra souvent adapter l'un à l'autre. Un champ optique plus petit que le champ capteur, c'est du capteur perdu. Un champ optique plus grand que le capteur, c'est un système optique plus grand en diamètre donc plus coûteux.

Dans le cas très particulier d'une simple lentille mince (celle-ci est la pupille) le champ n'est en principe pas limité (voir figure ci-dessous). Si le champ « sort » des conditions paraxiales où le stigmatisme est apparent, la qualité de l'image sera très vite dégradée donc inutilisable !

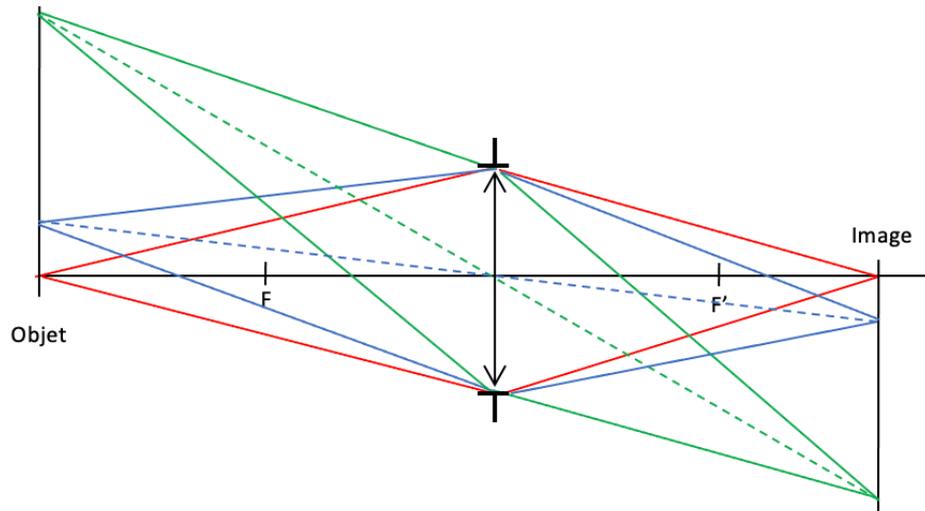


Figure : champ transversal d'une lentille mince.

Les limitations géométriques du champ interviennent dès que le système possède plus qu'un élément. Le champ sera donc toujours limité par au moins deux éléments qu'on appelle **lucarnes de champ**. Il existe plusieurs zones dans le champ que nous allons définir.

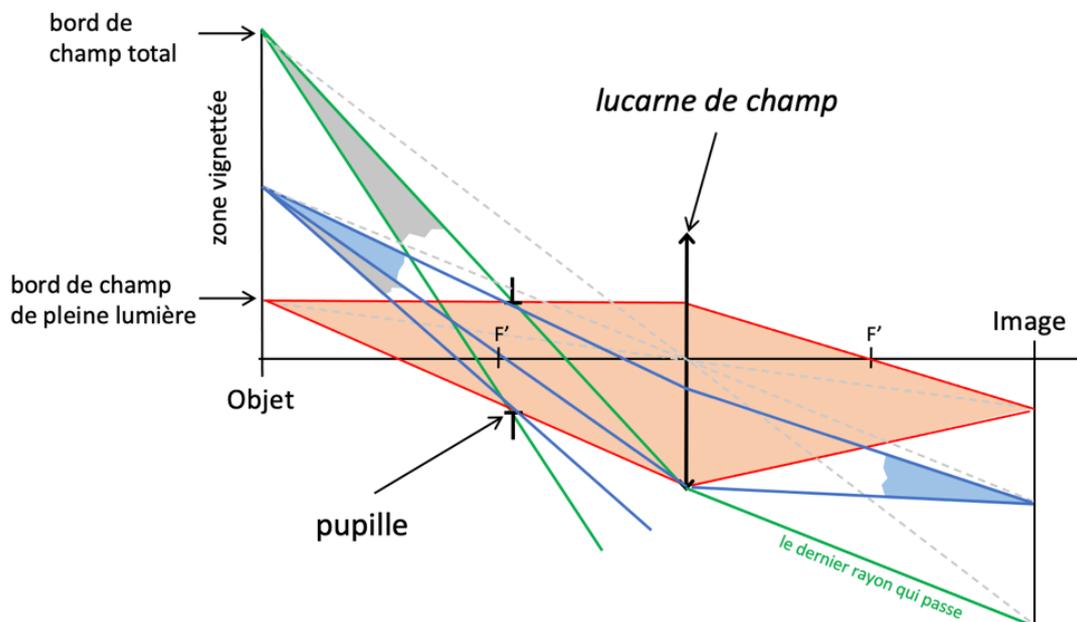


Figure : champs transversaux dans un système simple.

Si les rayons partant d'un point objet dans le champ et s'appuyant sur les bords de la pupille d'entrée traversent tout le système alors ce point appartient au **champ de pleine lumière**. Autrement dit, dans le champ de pleine lumière, la quantité de lumière reçue dans le plan image est uniquement définie par la pupille. Dans ce cas particulier, la pupille est entièrement éclairée. Au-delà du champ de pleine lumière un autre élément (lucarne) empêche les rayons entrant dans la pupille d'entrée de traverser tout l'instrument. On dit qu'il y a du **vignettage** (ou que le champ est vignetté). On parle également de champ de contour. Plus on s'éloigne du bord de champ de pleine lumière, plus on perd de rayons qui parviennent au plan image.

La quantité de lumière du point image correspondant décroît alors jusqu'à une situation où plus aucun rayon ne passe. Le point objet a atteint le **bord de champ total**. Dans la zone de champ vignetté de l'image, une décroissance de l'éclairement apparaît et est bien visible quand l'objet est homogène.



Figure : vignettage en bord d'image. Ici le bord de champ total, plus grand que le capteur utilisé pour l'acquisition, n'est pas visible - crédit : Chuttersnap on Unsplash.

Les champs objet et image sont liés par la conjugaison qui lie le plan objet et le plan image obtenu avec l'instrument d'optique (via le grandissement, le grossissement ou la focale). On rappelle que ce n'est pas la même conjugaison qui lie la pupille d'entrée et la pupille de sortie.

$$\begin{aligned}
 A &\xrightarrow{s.o.} A' \\
 &= \\
 \text{champ objet} &\xrightarrow{s.o.} \text{champ image} \\
 &\neq \\
 PE &\xrightarrow{s.o.} PS
 \end{aligned}$$

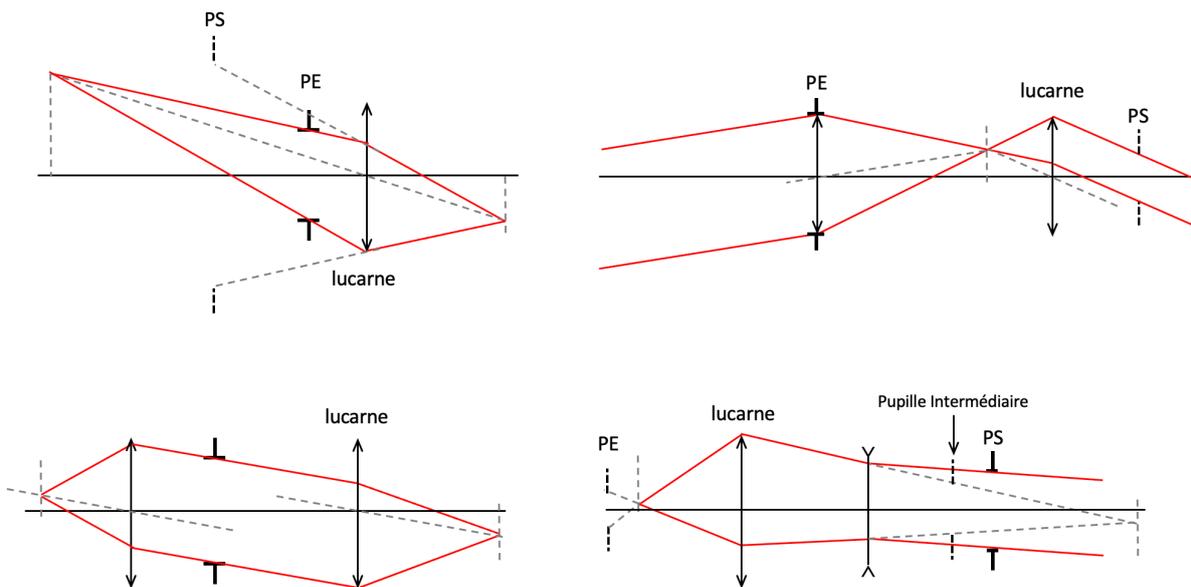


Figure : constructions dans le champ de pleine lumière.

#### 4. Imagerie sur un capteur

Lorsque l'image est projetée sur un capteur de taille finie (défini par son nombre de pixels  $N_X \times N_Y$ ) et qu'elle est plus grande alors le capteur va limiter le champ optique. Il devient lucarne de champ. Le champ objet vaut donc simplement l'équivalent du capteur dans l'espace objet (via le grandissement ou focale). Si on souhaite ne pas « voir » de vignettage dans l'image captée, il est nécessaire que le diamètre du champ de pleine lumière soit supérieur à la diagonale du capteur utilisé. En particulier dans un système qui travaille en conjugaison (quasi)infini-foyer, le champ objet est angulaire et vaut dans les deux directions,

$$FOV_X(\text{radians}) \approx \frac{N_X \times \text{taille pixel}}{\text{focale}}$$

$$FOV_Y(\text{radians}) \approx \frac{N_Y \times \text{taille pixel}}{\text{focale}}$$

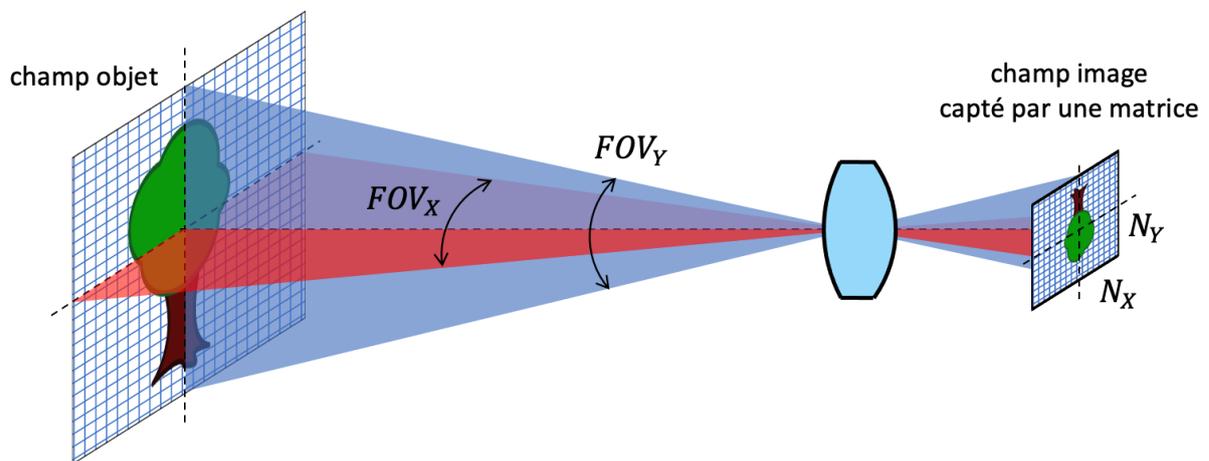


Figure : champ transversal limité par la taille du capteur.

On voit donc que le champ est d'autant plus petit que la focale est grande. C'est un classique pour celles et ceux qui pratiquent la photographie. Zoomer c'est augmenter la focale. On a l'impression de s'approcher de l'objet.

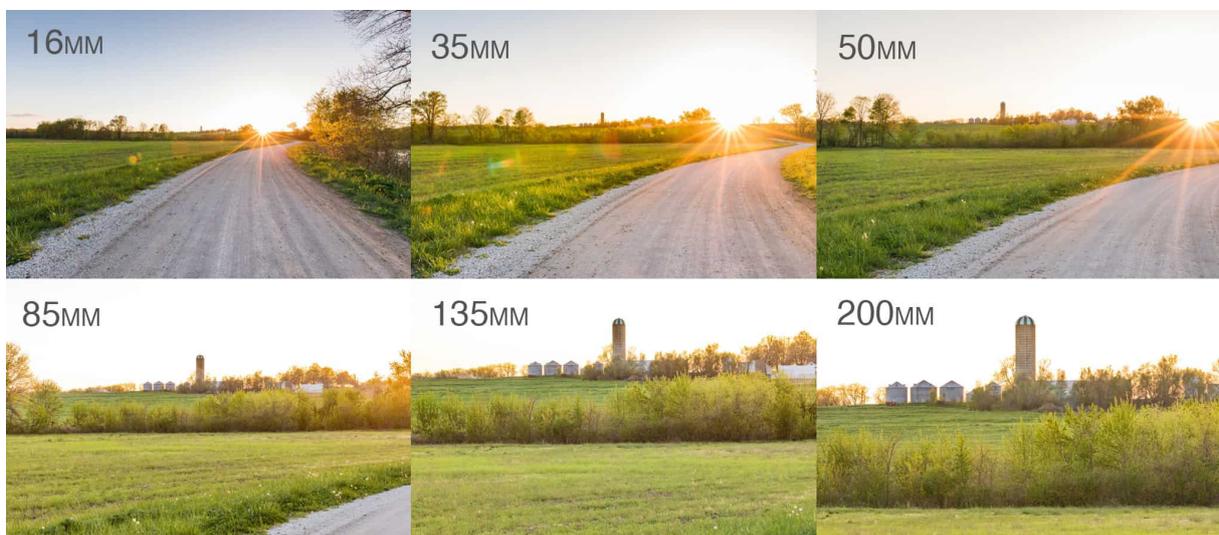


Figure : variation du champ objet avec la focale d'un objectif photographique (le capteur est identique) - crédit : non spécifié.

## 5. Instrument visuel

Dans un instrument visuel, l'image sera formée à l'infini grâce à un oculaire afin que l'œil puisse la voir sans accommoder. L'œil est également un système optique complexe, schématisé par un dioptre sphérique (de focale variable), une pupille (de diamètre variable) et un capteur (la rétine). La rétine est constituée d'une zone « haute définition » (utilisée pour la lecture) appelée fovéa de diamètre 1,5 mm. Le champ objet correspondant vaut,

$$\theta_{fov\acute{e}a} = \frac{\varnothing_{fov\acute{e}a}}{f_{\acute{o}eil}} = \frac{1,5 \text{ mm}}{16,7 \text{ mm}} \approx 5^\circ$$

Remarque : L'essentiel de la puissance de l'œil est lié à la courbure de la cornée. Les plans principaux H et H' sont très proches de la cornée. Si on néglige la distance HH', l'œil est modélisé par un dioptre air/eau convergent de rayon de courbure R=5,6 mm et d'indice n=1,33.

$$f = -\frac{f'}{n} = \frac{R}{n-1} = 16,7 \text{ mm}$$

En raison de mouvements rapides de l'œil le champ de vision semble être d'environ 50°. Le champ total (dû à la rétine) de l'œil est supérieur à 180°. Un instrument visuel devra donc avoir un champ image de l'ordre de 50° pour faire une observation sans devoir trop tourner l'œil sur lui-même, ce qui ne serait pas agréable à l'usage.

Dans un instrument, nous avons vu que tous les rayons provenant de points objets situés dans le champ de pleine lumière passent à travers la pupille de sortie. Après la pupille de sortie les rayons d'un point du champ restent parallèles (puisque l'image est à l'infini) mais s'écartent rapidement de l'axe optique (voir figure ci-dessous). On comprend par le schéma que si l'œil est trop en arrière de cette pupille de sortie, des rayons provenant de certains points du champ ne pourront pas être collectés par la pupille de l'œil. Pour éviter cela il faut positionner l'œil au niveau de la pupille de sortie de l'instrument, appelée souvent cercle oculaire. Pour ne pas perdre de lumière il est également nécessaire que le diamètre de la pupille de sortie ne dépasse pas celui de l'œil et qu'elle soit accessible, donc une pupille de sortie virtuelle n'est pas adaptée. Un instrument diurne devra donc avoir une pupille de sortie de 0,8 à 4 mm alors que dans le cas d'un instrument pour la vision nocturne elle sera de 7 à 8 mm.

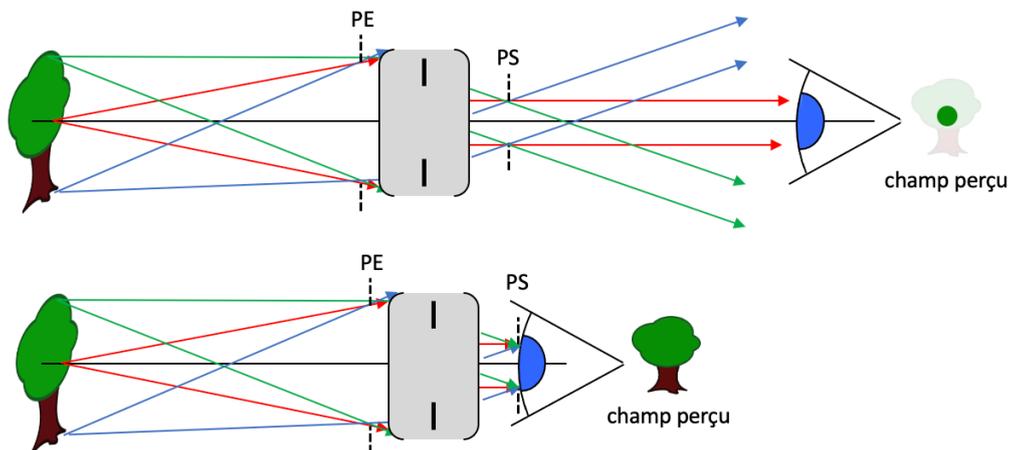


Figure : position de l'œil par rapport à la pupille de sortie de l'instrument.

## 6. Systèmes télécentriques

Les objectifs télécentriques sont conçus pour avoir un grandissement constant, quelle que soit la distance de l'objet ou la position de l'objet dans le champ. Cet effet est utile dans de nombreuses applications de mesure de vision industrielle. Par exemple, sur une ligne de production, il est nécessaire de connaître précisément la taille des objets indépendamment de leur position dans le champ capté.

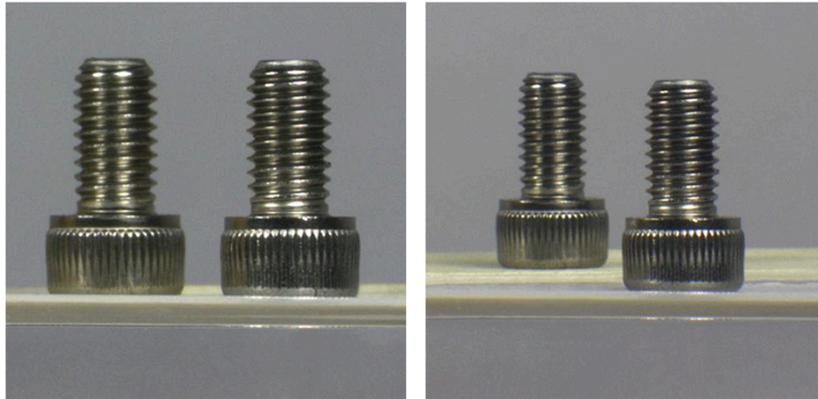


Figure : images obtenues avec un système télécentrique (gauche) et un système conventionnel (droite)  
– crédit : Thorlabs.

Dans un système conventionnel, où la lentille est la pupille, le grandissement varie avec la position de l'objet. De plus le cône de rayons utiles pour chaque point du champ varie également. L'image sera alors déformée dans le plan du détecteur fixe.

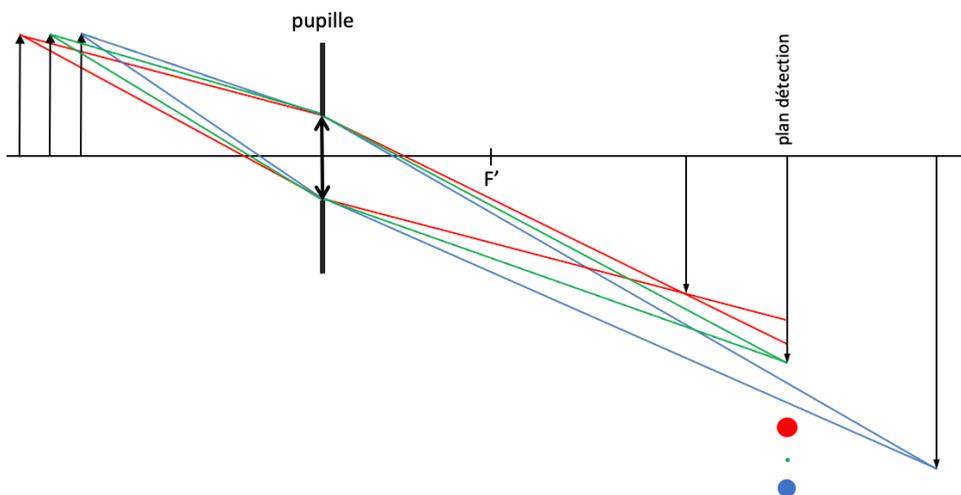


Figure : imagerie dans un système conventionnel.

En revanche, si la pupille d'entrée est à l'infini (la pupille est sur le foyer image), le rayon principal du cône d'ouverture de chaque point du champ reste parallèle à l'axe optique. Bien que le grandissement varie également avec la position, l'image d'un plan en avant ou en arrière du plan conjugué sur le capteur a la même taille apparente.

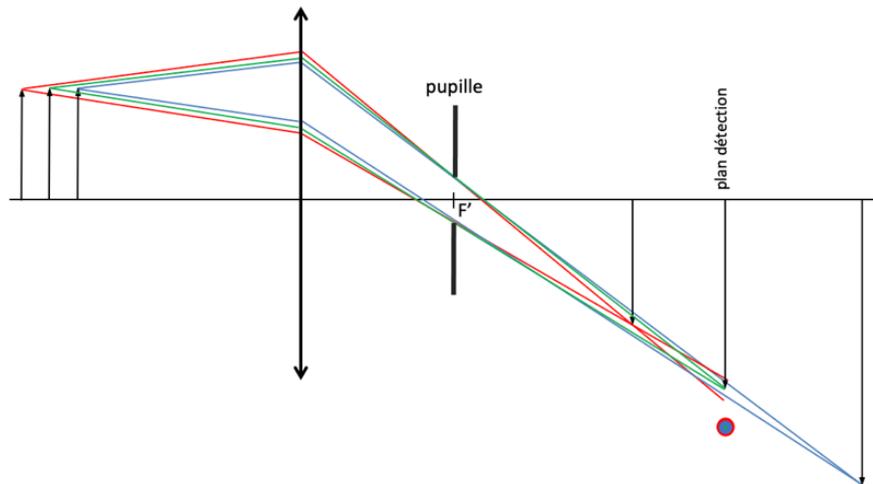


Figure : imagerie dans un système télécentrique objet.

Pour obtenir un grandissement rigoureusement constant en fonction de la position de l'objet sur l'axe, il faut utiliser un système afocal constitué à minima de deux objectifs. Pour garantir l'effet télécentrique-objet, la pupille est toujours disposée au foyer image du premier objectif et par construction elle sera également au foyer objet du deuxième objectif. La pupille de sortie sera donc aussi à l'infini. Le système est également télécentrique-image. Le rayon principal sera donc toujours parallèle à l'axe quel que soit le point dans le champ. Cet objectif est appelé bi-télécentrique. L'effet télécentrique image assure que le rayon principal soit toujours parallèle quel que soit le point du champ. Cela minimise toute dépendance à l'angle d'incidence sur les pixels du capteur ou tout autre composant comme les filtres.

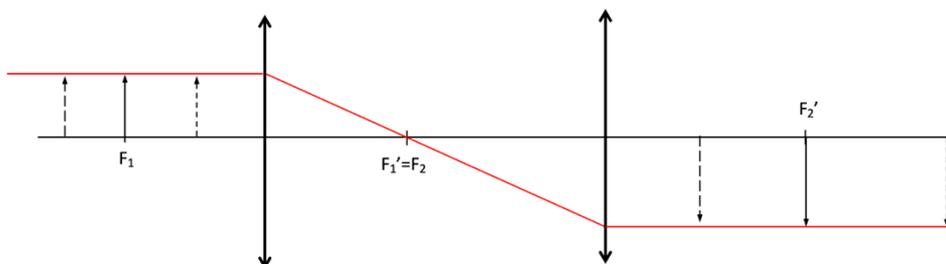


Figure : grandissement constant dans un système afocal.

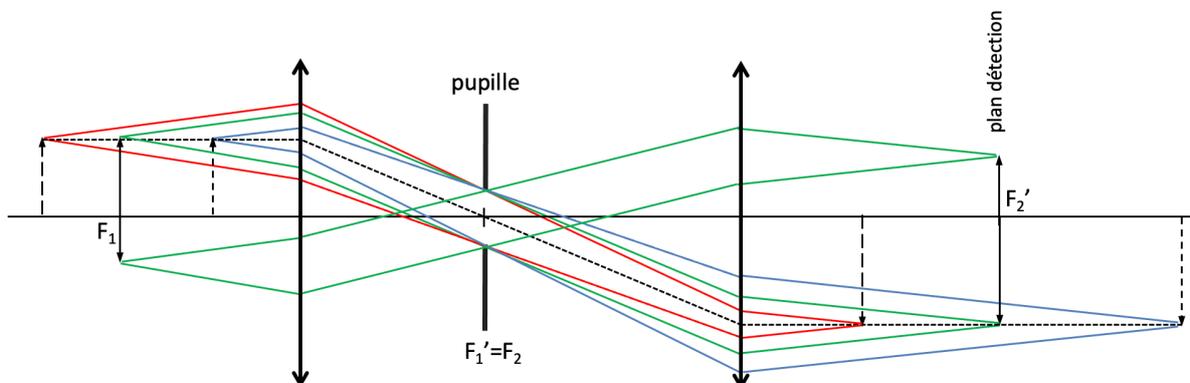


Figure : imagerie dans un système bi-télécentrique.

## C. Qualité de l'image – limite de résolution

Faire une image, c'est reproduire au mieux chaque point provenant de l'objet. Le système optique devra donc être capable de distinguer deux points objets très proches pour reproduire des détails. Si la source est (quasi)ponctuelle on ne parle pas spécifiquement de formation d'image mais de qualité de la tache image. La performance en résolution du système sera évaluée par la capacité de faire d'un point objet une image la plus petite possible et ce pour tous les points du champ image. Le cas géométrique idéal (l'image d'un point est un point), appelé stigmatisme, est, nous l'avons vu, limité à des configurations très spécifiques. Les performances seront conditionnées par une multitude de facteurs,

- La diffraction (effet ondulatoire)
- Les défauts géométriques liés à la conception optique (aberrations)
- Les défauts des matériaux (inhomogénéité de l'indice, bulles d'air...)
- Les défauts des surfaces fabriquées (forme, rugosité)
- La mécanique (alignement, montage)
- L'environnement (température, pression, vibration)
- La résolution spatiale du détecteur (pixel)

Ces différents facteurs (hors pixel) auront toujours comme effet d'étaler la tache image et donc de dégrader la qualité de l'image. Il faudra toujours, dans le cadre d'un cahier des charges de conception d'un système optique, savoir minimiser ces défauts pour atteindre les performances visées en termes de résolution mais également d'éclairement de l'image obtenue. Après l'esquisse paraxiale du système, la recherche du meilleur compromis passe le plus souvent par l'usage d'un logiciel de conception optique. Les plus connus sont OPTICS STUDIO - ZEMAX (enseigné en 2A) et CODE V (option 3A).

### 1. La diffraction

La diffraction est liée à la nature ondulatoire de la lumière. Contrairement à l'optique géométrique un simple diaphragme perturbe le front d'onde. A l'infini derrière l'ouverture on trouve que la répartition lumineuse est directement liée à la transformée de Fourier de la pupille. On parle de diffraction à l'infini ou de régime de Fraunhofer. Dans le cas d'une conjugaison par une lentille on retrouve ce régime dans le plan image (voir cours et TP d'optique physique). L'image d'un point objet à travers un système même parfaitement stigmatique est donc une tache dont le diamètre dépend uniquement de la longueur d'onde et de l'ouverture numérique du système optique. Le diamètre de la tache de diffraction est inversement proportionnel au diamètre de la pupille. Dans le cas d'une pupille circulaire, la distribution lumineuse est appelée tache d'Airy. Son rayon  $\rho_{airy}$ , défini au niveau de la 1<sup>ère</sup> annulation, vaut,

$$\rho_{airy} = 0,61 \frac{\lambda}{ON_{image}}$$

Cette expression peut également s'écrire dans le cas particulier de la conjugaison infini-foyer

$$\rho_{airy}^{infini-foyer} = 1,22\lambda N$$

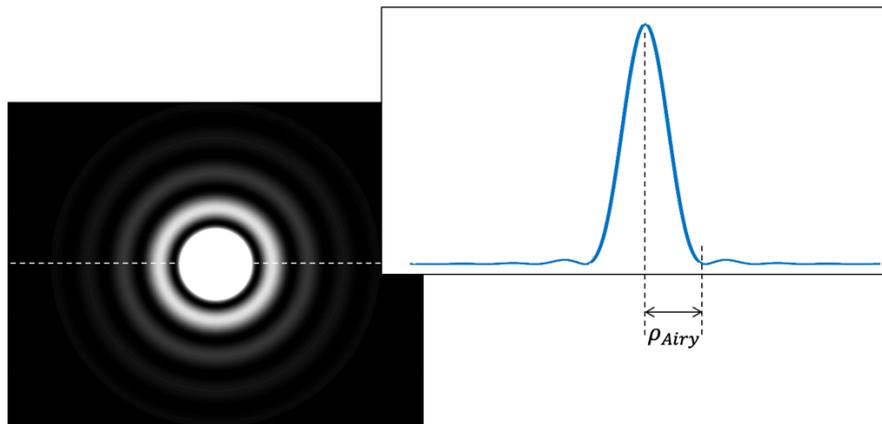


Figure : tache d'Airy (échelle logarithmique) et coupe transversale (échelle linéaire).

Si un système optique est idéal alors son pouvoir de résolution sera uniquement limité par la diffraction. La résolution optique d'un système d'imagerie limitée par la diffraction est définie par le **critère de Rayleigh** et vaut le rayon de la tache d'Airy. C'est la limite pour laquelle on peut distinguer deux points objets proches malgré l'étalement dû à la diffraction.

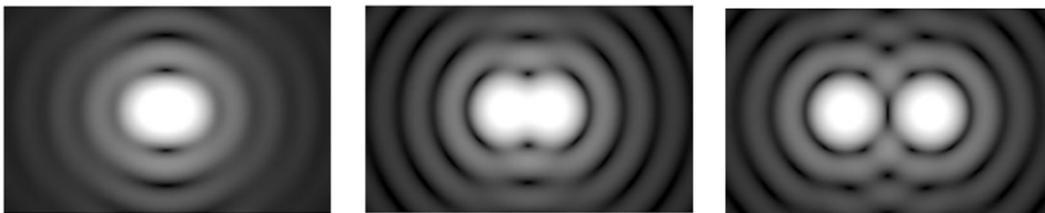


Figure : deux taches de diffraction non résolues ; résolues en limite de Rayleigh ; bien résolues.

La résolution objet est donc tout simplement la tache d'Airy ramenée dans l'espace objet via le paramètre de grandeur d'image (grandissement par exemple). Par exemple considérons un système infini-foyer (un télescope par exemple) et limité par la diffraction. La résolution dans l'espace image est le rayon de la tache d'Airy. On passe dans l'espace objet en divisant par la focale, soit une résolution angulaire objet,

$$\delta\theta_{\text{objet}} = \frac{\rho_{\text{airy}}}{f'} = \frac{1,22\lambda N}{f'} = \frac{1,22\lambda}{\phi_{PE}} \approx \frac{\lambda}{\phi_{PE}}$$

La résolution (angulaire) d'un télescope (limité par la diffraction et en l'absence de turbulence atmosphérique) est donc uniquement liée au diamètre de sa pupille d'entrée qui est en général le miroir primaire.

Dans un instrument où l'objet est à distance finie, la résolution dans l'espace objet est le rayon de la tache d'Airy divisé par le grandissement. On a,

$$\delta y_{\text{objet}} = \frac{\rho_{\text{airy}}}{g_y} = 0,61 \frac{\lambda}{g_y \times ON_{\text{image}}}$$

D'après la relation d'aplanétisme (sinus d'Abbe), on peut exprimer cette résolution en fonction de l'ouverture numérique objet.

$$\delta y = 0,61 \frac{\lambda}{ON_{\text{objet}}}$$

L'ouverture numérique est le produit de l'indice et du sinus de l'angle d'ouverture. Augmenter l'ouverture augmente la résolution. Augmenter l'indice du milieu dans lequel baigne l'objet permet également d'améliorer la résolution. C'est le principe des objectifs de microscope à immersion, où l'objet est plongé dans une huile d'indice supérieur à 1, ce qui permet d'améliorer la résolution par rapport au cas usuel « tout dans l'air ». Les microprocesseurs actuels sont également fabriqués avec des objectifs à immersion dans l'eau.

Enfin nous noterons que cette résolution tend vers une limite fondamentale lorsque l'ouverture numérique tend vers 1. On obtient la meilleure résolution possible (toujours au sens du critère de Rayleigh),

$$\delta y_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{n}$$

La plus faible résolution est, pour un instrument idéal, égale à environ une demi-longueur d'onde.

## 2. Les aberrations

Les défauts géométriques sont quantifiés dans les logiciels de conception optique par le **spot diagram**. Il correspond aux points d'impact dans le plan image des rayons partants d'un point objet ayant traversé le système. Dans des cas simples, il est possible d'exprimer analytiquement l'étalement de la tache optique.

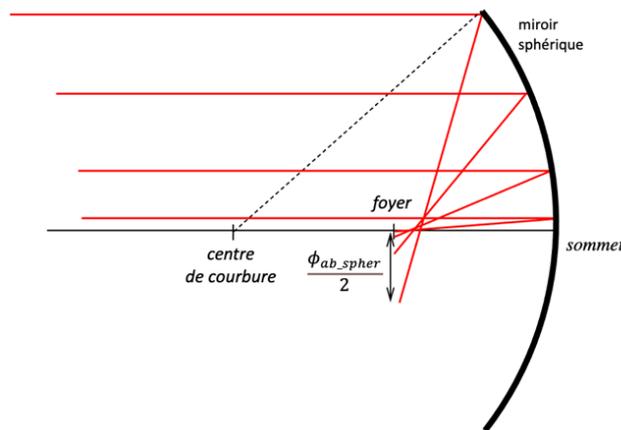


Figure : aberration transversale d'un miroir sphérique.

Par exemple dans le cas du miroir sphérique en conjugaison infini-foyer pour un point objet sur l'axe on trouve que l'étalement transversal de la tache vaut approximativement, dans le plan du foyer paraxial,

$$\phi_{ab\_spher} \approx \frac{f}{32N^3}$$

Ce défaut sur l'axe s'appelle une aberration sphérique. Plus le système est ouvert (N petit) plus le défaut est présent. Dans le cas d'une parabole ce défaut est nul puisque cette surface est rigoureusement stigmatique pour cette conjugaison. Dans le champ, d'autres aberrations s'ajoutent et l'expression se complexifie. La théorie des aberrations est l'objet d'un cours en 2<sup>ème</sup> année de votre formation.

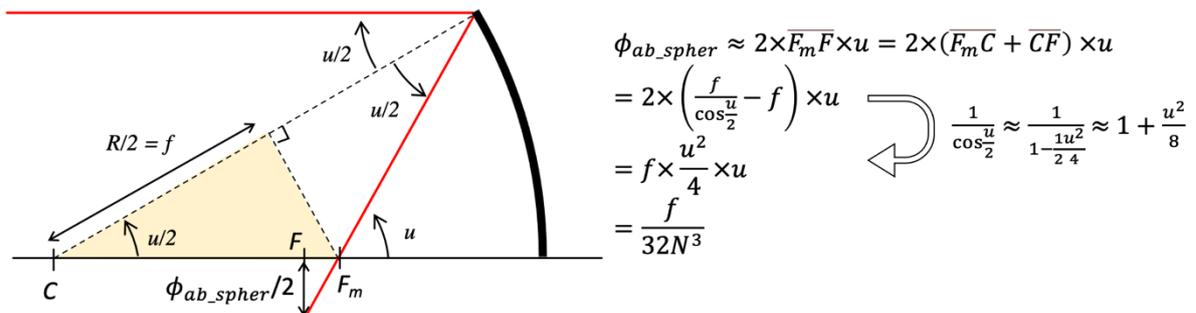


Figure : éléments de calcul pour la tache d'aberration sphérique du 3<sup>ème</sup> ordre (angle u pas trop grand) dans le miroir sphérique en conjugaison infini-foyer ouvert à N=1/2u.

La figure ci-dessous montre le « spot diagram » d'un miroir sphérique de focale 1000 mm et d'ouverture N=6 travaillant pour un point objet à l'infini sur l'axe. Le cercle noir représente la tache de diffraction à λ=500 nm soit un diamètre φ<sub>airy</sub> = 2,44λN ≈ 7 μm. L'aberration sphérique au foyer paraxial, d'après le calcul précédent, donne φ<sub>ab\_spher</sub> ≈ 144 μm ce qui correspond à l'ordre de grandeur de la simulation.

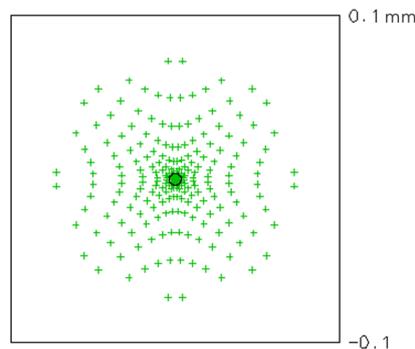


Figure : spot diagram d'un défaut d'aberration sphérique d'un miroir sphérique.

### 3. Résolution du système optique versus résolution du capteur d'image

Dans un système optique, la tache image d'un point est appelée **réponse percussionnelle** (en anglais, **Point Spread Function, PSF**). Cette fonction d'étalement de l'image du point objet est l'équivalent à deux dimensions spatiales de la réponse impulsionnelle à une dimension temporelle dans un système électronique. Si la tache géométrique est très inférieure à la tache de diffraction alors le système est dit « **limité par diffraction** ». Cet étalement de la tache image intervient pour tous les points de l'image de l'objet ce qui aura pour conséquence de détériorer sa qualité. Mathématiquement il y a une convolution entre la PSF et l'image géométrique.

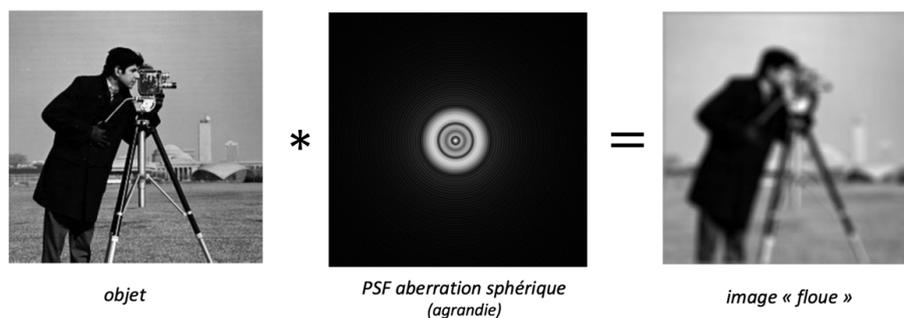


Figure : effet d'une aberration sur une image – crédit image gauche : non spécifié.

Pour une caméra numérique, la résolution finale du système optique globale est liée au diamètre de la PSF et/ou à la taille des pixels. Si la tache image est beaucoup plus petite que le pixel la résolution est limitée par le pixel et la résolution dans l'espace objet (cas infini-foyer) est,  $\delta\theta_{pixel} \approx \frac{pixel}{f'}$ .



Figure : image dégradée par la taille des pixels.

Mais cette situation n'est pas idéale. En raison du théorème de Shannon-Nyquist la fréquence spatiale d'échantillonnage  $f_e$  (inverse de la période d'échantillonnage = 1/pixel) doit être au moins deux fois plus grande que l'inverse de la taille caractéristique du plus petit objet (ramené dans l'espace image) qu'on cherche à voir (ici le rayon de la tache d'Airy). Ne pas respecter ce critère, c'est à dire sous-échantillonner une image, entrainera de l'aliasing qui est un repliement des hautes fréquences spatiales (voir cours de math et signal). On doit donc avoir une fréquence d'échantillonnage supérieure à la fréquence de coupure du système optique  $f_o$  (ce point n'est pas détaillé dans ce document),

$$f_e = \frac{1}{pixel} > 2 \times f_o = 2 \times \frac{2 \times ON_{image}}{\lambda} = \frac{2,44}{\rho_{airy}}$$

On retiendra qu'un pixel cinq fois plus petit que le diamètre de la PSF moyenne évitera les artéfacts dans l'image dus au repliement. Les très bons objectifs photographiques auront fatalement des PSF plus petites que la taille du pixel du capteur utilisé. Des filtres anti-aliasing sont nécessaires pour éviter les artéfacts disgracieux.

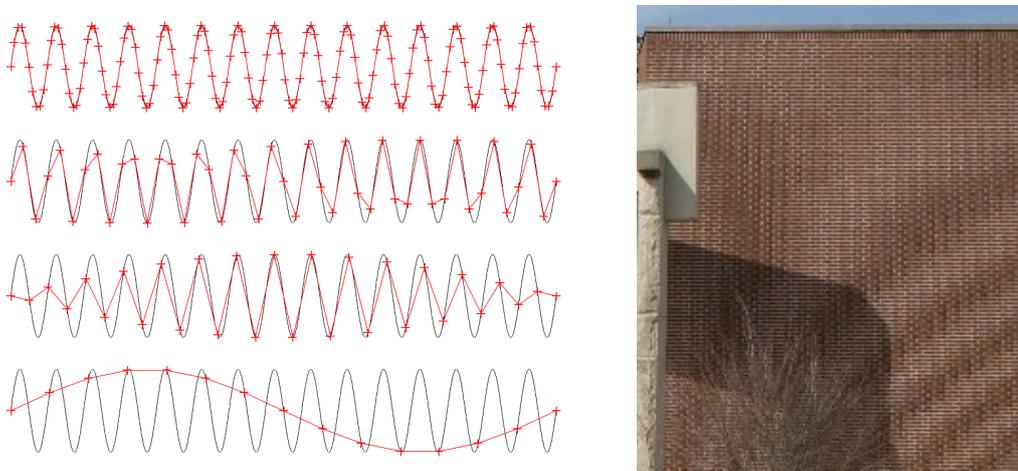


Figure : illustration de l'effet de l'échantillonnage dans une période d'un signal mono fréquentiel. De haut en bas : 10 points ; 3 points ; 2 points (Shannon-Nyquist) ; 1 point (artefact). La photo montre un artefact obtenu sur un objet périodique (les tuiles) insuffisamment échantillonné – crédit : en-wikipedia.

#### 4. Le cas de l'œil

L'œil est système optique complet (cornée, cristallin et rétine). Sa résolution sera donc limitée soit par les cônes de la rétine (équivalent aux pixels d'une caméra) ou soit par l'optique (cornée/cristallin) via la diffraction ou les aberrations.

On sait que la focale (objet) vaut 16,7 mm. Un cône fait 2,5 μm de taille caractéristique et la pupille en vision diurne vaut environ 4 mm.

La résolution limitée par le diamètre des cônes est,

$$\delta\theta_{\text{cône}} \sim \frac{\text{cône}}{f} = \frac{2,5\mu\text{m}}{16,7\text{mm}} \sim 30''$$

La résolution limitée par la diffraction est dans le cas diurne et avec un bon éclairage,

$$\delta\theta_{\text{pupille}} \sim \frac{\lambda}{\Phi_{PE}} = \frac{500\text{nm}}{4\text{mm}} = 10^{-4}\text{rad} \sim 30''$$

On peut donc dire que l'optique de l'œil est parfaitement adaptée à la rétine.

En pratique la résolution d'un œil est limitée par les aberrations de la cornée et varie de 1' à 2' pour un œil ne présentant pas de défaut de mise au point (myopie, hypermétropie) ni d'astigmatisme.

#### 5. Profondeur de champ

Un système optique d'imagerie stigmatique conjugue un plan objet avec un plan image. Si l'objet est plan, l'image est nette. Que se passe-t-il si le plan est incliné ? Ou si l'objet n'est pas plan ? Plus le point de l'objet est loin du plan objet conjugué, plus l'image de ce point est grande dans le plan image conjugué. La zone  $dz$  dans l'espace objet correspondant à une image nette s'appelle la profondeur de champ. Pour un système idéal elle dépend de la dimension du pixel ou de la taille de la tache de diffraction. On appelle profondeur de foyer l'équivalent dans l'espace image de la profondeur de champ.

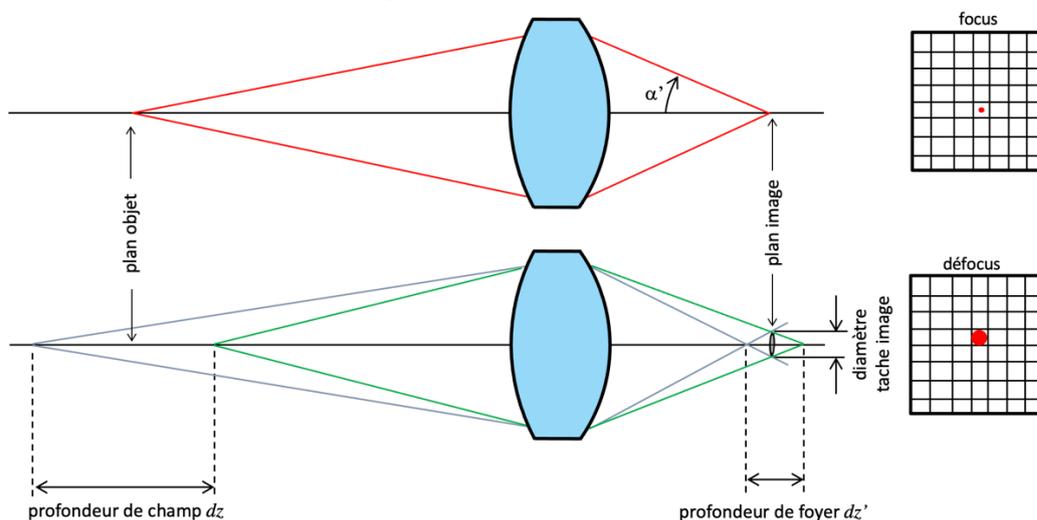


Figure : Illustration de la profondeur de champ.

Dans le cas où les pixels sont grands devant la tache d'Airy, la profondeur de foyer vaut en 1<sup>ère</sup> approximation (l'ouverture des rayons bleus et verts sur le schéma sont supposés égaux),

$$dz' \approx \frac{\text{pixel}}{\alpha'}$$

La profondeur de champ est simplement la profondeur de foyer ramené dans l'espace objet via le grandissement axial,

$$dz \approx \frac{\text{pixel}}{g_y^2 \times \alpha'}$$

On peut simplifier cette expression en se plaçant dans un cas classique où l'objet est à une distance  $d \gg f'$ . Dans ce cas,  $g_y \approx \frac{f'}{d}$  et  $\alpha' \approx \frac{1}{2N}$ . Soit

$$dz_{\text{pixel}} \approx 2N \times \text{pixel} \times \left(\frac{d}{f'}\right)^2$$

On constate donc que, pour un objet à une distance  $d$  du système, la profondeur de champ est inversement proportionnelle à l'ouverture (ou proportionnelle à  $N$ ) pour une focale donnée. Pour une ouverture donnée, la profondeur de champ est inversement proportionnelle au carré de la focale. Fermer un objectif augmente la profondeur. Une courte focale aura une plus grande profondeur qu'une longue focale. Un objectif pour photographier un paysage devra donc avoir une courte focale pour que toute la scène soit nette et pour s'ajuster au large champ transversal nécessaire.



Figure : évolution de la profondeur de champ en fonction de l'ouverture – crédit : non spécifié.



Figure : évolution de la profondeur de champ en fonction de la distance focale – crédit : non spécifié.

Quand l'instrument travaille en conjugaison infini-foyer (c'est à dire que la mise au point est réglée à l'infini) l'image reste nette de l'infini jusqu'à une certaine distance, appelée **distance hyperfocale**. La démarche est identique au calcul de la profondeur de champ.

Dans l'espace image, on a,

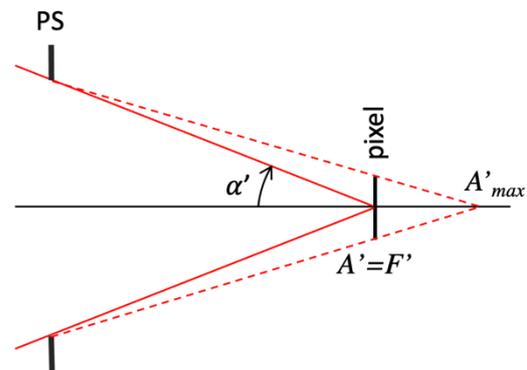
$$\overline{F'A'_{max}} \sim \frac{\text{pixel}}{2\alpha'}$$

La distance hyperfocale est obtenue en passant la distance  $\overline{F'A'_{max}}$  dans l'espace objet en utilisant la relation de conjugaison aux foyers,

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'_{max}} = -f'^2$$

Soit

$$\overline{FA} \sim \frac{f'^2}{N \times \text{pixel}}$$



## 6. Précisions de pointés

Dans un système visuel, comme un viseur utilisé pour effectuer des mesures de pointés longitudinaux, la précision dépend de la tache image au foyer objet de l'oculaire (diffraction, aberration) et de la capacité de l'œil à maintenir une accommodation stable, c'est-à-dire la capacité de voir net un objet lointain ou proche. Nous allons déterminer séparément la précision pour les deux effets.

La tache de diffraction de l'objectif (qui est la pupille) empêche l'œil de faire la mise au point précisément sur le plan focal de l'oculaire (incertitude  $dz'$ ) équivalent à une imprécision de pointé  $dz$  dans le plan objet. Cette précision est égale à la profondeur de champ de l'objectif limité par la diffraction (vue précédemment),

$$dz'_{diffraction} \approx \frac{\phi_{diffraction}}{\alpha'} \approx \frac{\lambda}{\sin^2 \alpha'}$$

Ramené dans l'espace objet par le grandissement transversal de l'objectif et en utilisant la relation des sinus d'Abbe, on a,

$$dz_{diffraction} \approx \frac{\lambda}{g_y^2 \times \alpha'^2} = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

L'œil est l'association d'une cornée et d'un cristallin de puissance variable permettant l'accommodation. Un œil peut alors accommoder au plus loin à  $d_{max}$  (punctum remotum) quand il est au repos (pour un œil normal  $d_{max} = \infty$ ) jusqu'à une distance minimale  $d_{min}$  (punctum proximum).

La puissance optique de l'œil est liée à sa focale ( $f = 16,7 \text{ mm}$  ;  $f' = 22,3 \text{ mm}$ ).

$$P_{\text{oeil au repos}} = \frac{1}{f} = \frac{n}{f'} = \frac{1}{16,7 \text{ mm}} = 60\delta$$

La puissance (ou convergence) de l'œil est due à la cornée et à la puissance variable du cristallin. Ce dernier possède 22000 couches cellulaires pour lui donner la plasticité nécessaire à sa variation de forme commandée par le muscle ciliaire. La puissance du cristallin peut varier de 14 dioptries pour un enfant de 5 ans et jusqu'à 1 voire 0 dioptrie au-delà de 50 ans. Cette variation avec l'âge s'appelle la presbytie.

$$P_{\text{oeil}} = P_{\text{cornée}} + P_{\text{cristallin}} + dP_{\text{cristallin}} = 44\delta + 16\delta + dP_{\text{cristallin}}$$

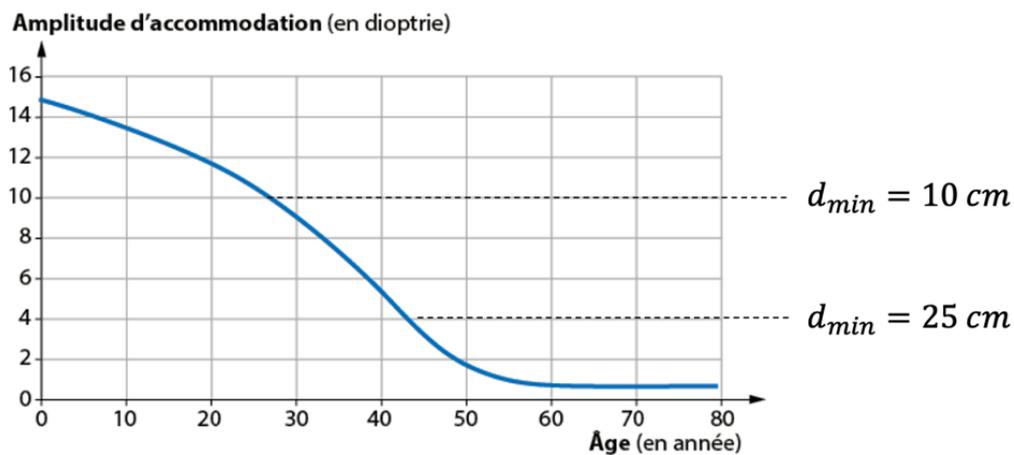


Figure : évolution de l'amplitude d'accommodation en fonction de l'âge – crédit : non spécifié.

Lorsque l'œil est au repos, il n'accommode pas et regarde à l'infini. Lorsqu'il accommode au plus près, il regarde à la distance minimale  $d_{\min}$ .

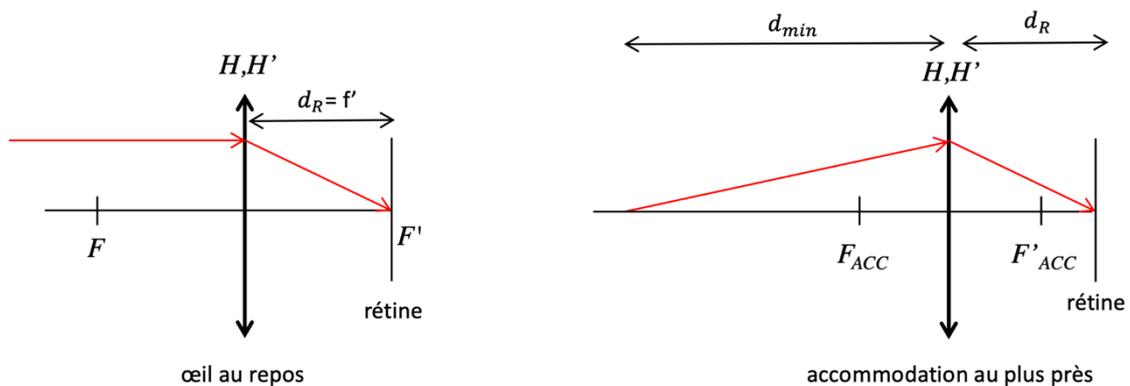


Figure : accommodation de l'œil.

Pour un œil normal (emmétrope) au repos, le foyer image se trouve sur la rétine, soit

$$f'_{\text{repos}} = d_R \rightarrow P_{\text{repos}} = \frac{1}{d_R} = \frac{1}{0,223} = 60\delta$$

L'accommodation est la variation de puissance de l'œil (ici permise par le cristallin),

$$\Delta P = P_{\text{oeil ACC}} - P_{\text{oeil REPOS}}$$

Lorsque l'œil accommode au plus près (distance objet-œil  $d_{min}$ ), la taille de l'œil ne change pas mais la focale varie. On peut donc écrire,

$$\frac{1}{d_R} + \frac{1}{d_{min}} = \frac{1}{f'_{ACC}} \rightarrow P_{oeil\ REPOS} + \frac{1}{d_{min}} = P_{oeil\ ACC}$$

On voit donc que l'inverse de l'accommodation donne accès à la distance minimale d'approche.

$$d_{min} = \frac{1}{\Delta P}$$

Par exemple, 4 dioptries équivaut donc un quart de mètre soit 250 mm.

Maintenant revenons à notre viseur et estimons l'erreur de pointé liée à une accommodation de l'œil. On écrit les conjugaisons lorsque l'œil regarde à l'infini et à la distance d'accommodation,

$$A \xrightarrow{\text{objectif}} A' = F_{OC} \xrightarrow{\text{oculaire}} A'' = \infty$$

$$A + dz_{acc} \xrightarrow{\text{objectif}} A' = F_{OC} + dz'_{acc} \xrightarrow{\text{oculaire}} A''$$

L'œil est placé au niveau de la pupille de sortie, elle-même proche de  $F'_{oc}$ , la distance d'accommodation ( $1/Ac$ ) est donc directement la distance entre le foyer  $F'_{oc}$  et l'image finale  $A''$ .

$$dz_{acc} = \frac{dz'_{acc}}{g_{x-obj}} = \frac{F_{oc}A'}{g_{x-obj}} = \frac{f'^2_{oc}}{g^2_{y-obj} \times F'_{oc}A''}$$

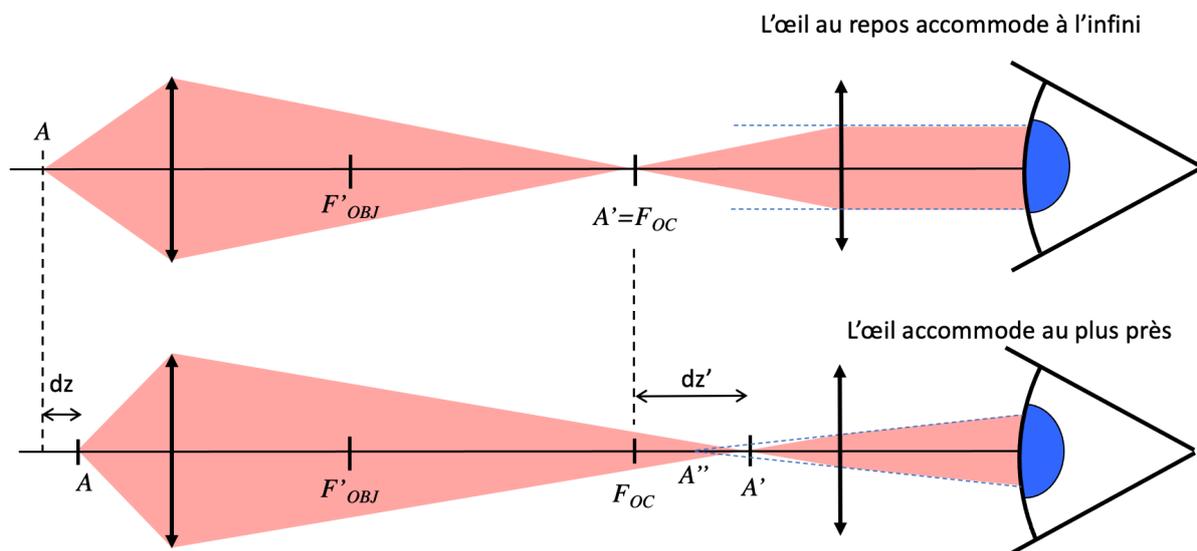


Figure : effet d'une accommodation dans un viseur.

Prenons par exemple, un objectif de grandissement 2,5 d'ouverture 0,1 associée avec un oculaire  $\times 10$ . On considère une distance d'accommodation de 25 cm (soit  $4\delta$ ).

Le grossissement commercial de l'oculaire permet de calculer sa focale.

$$G_c = \frac{1}{4f'} \rightarrow f'_{oc} = \frac{1}{40} m = 25 \text{ mm}$$

On en déduit la précision liée à l'accommodation,

$$dz_{acc} = \frac{f'^2_{oc}}{g^2_{y-obj} \times F'_{oc} A''} = \frac{25^2}{2,5^2 \times 250} = 0,4 \text{ mm}$$

L'ouverture de l'objectif permet de déterminer la précision liée à la diffraction,

$$dz_{diffraction} \approx \frac{\lambda}{\alpha^2} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,1^2} = 0,05 \text{ mm}$$

La précision de pointé est donc ici limitée par l'accommodation. Si on réduit cette dernière à  $0,1\delta$  (en forçant l'œil à regarder le plan focale grâce à un réticule) la précision associée diminue à  $0,01 \text{ mm}$  et la précision de la mesure est maintenant limitée par la diffraction.

## D. Performances photométriques

### 1. Introduction

La photométrie est l'étude et la mesure du transport de flux par les faisceaux lumineux. La photométrie physique ou radiométrie est le domaine qui étudie la mesure de l'énergie transportée par les rayonnements électromagnétiques sur tout le spectre. La photométrie visuelle étudie plus spécifiquement les rayonnements visibles du point de vue de la vision humaine. On utilisera le terme photométrie pour tous les cas étudiés.

Dans ce chapitre nous nous intéressons spécifiquement à la photométrie dans les instruments qui forment des images. Une image peut être vue comme un flux de lumière localisée sur une surface. Le **flux** est une puissance optique et son unité énergétique est le **watt (W)**. On peut également l'exprimer comme un nombre de photon émis par seconde (on parle d'unité photonique). Chaque photon porte une énergie  $hc/\lambda$  ( $h$  : constante de Planck,  $c$  : vitesse de la lumière dans le vide)

Exemple : Un pointeur laser de puissance  $P$  de 1 mW dans le vert émet un nombre de photon par seconde d'environ  $N = \frac{P\lambda}{hc} = 10^{15} s^{-1}$ . A titre de comparaison, un des plus gros laser du monde (le NIF aux US) en émet  $10^{24} s^{-1}$ . Il vient d'obtenir le seuil d'ignition de fusion nucléaire.

Le flux par unité de surface s'exprime en **W.m<sup>-2</sup>** et se nomme **l'éclairement**. C'est cette grandeur qui sera pertinente à calculer dans une image d'un objet étendue. Par exemple, l'éclairement sur Terre du Soleil vaut approximativement 1300 W.m<sup>-2</sup>.

Dans le cas de la vision humaine, le flux va dépendre de la longueur d'onde car la sensibilité spectrale de l'œil n'est pas constante sur le spectre visible. Il a donc été défini une unité visuelle appelée **lumen (lm)** qui correspond au maximum de sensibilité en vision de jour. Le lumen équivaut à 1/683 de Watt à la longueur d'onde de 555 nm (historiquement défini avec une bougie). 1 lumen correspond à peu de chose près au flux émis par la pleine lune. La led d'un smartphone émet environ quelques dizaines de lumen. En unité visuelle l'éclairement s'exprime en **lux (lm.m<sup>-2</sup>)**.

Revenons à notre système optique et cherchons à calculer le flux dans l'image formée. On sait que dans le champ de pleine lumière d'un instrument, tous les rayons passant par la pupille d'entrée ressortent par la pupille de sortie pour former l'image. Une lentille ne transmet généralement pas 100% de la lumière incidente car il peut y avoir des réflexions résiduelles sur les faces (traitement antireflet imparfait), de la diffusion car les surfaces ne sont pas parfaitement polies... Toutes ces pertes se cumulent (par exemple les coefficients de réflexion d'un miroir ou de transmission d'une lentille se multiplient), si bien qu'on peut dire que le flux qui sort par la pupille de sortie est directement lié au flux entrant par la pupille d'entrée modulo les pertes diverses des éléments optiques (paramètre  $\tau$ ),

$$F_{image} = F_{sortant\ de\ PS} = \tau \times F_{entrant\ dans\ PE}$$

Tout se ramène au calcul du flux émis par l'objet qui entre dans la pupille d'entrée de l'instrument. Nous allons dans un premier temps chercher à calculer ce flux pour un point sur l'axe puis nous étendrons à l'ensemble de l'objet étendu spatialement.

## 2. Source ponctuelle – notion d'intensité et d'angle solide

Une source ponctuelle émet dans tout l'espace un flux lumineux de façon isotrope. Le flux émis par la source qui entre dans la pupille d'entrée de l'instrument est donc, en première approximation, le flux émis dans le cône équivalent à la portion de sphère qui s'appuie sur la surface de la pupille d'entrée (PE) et dont le centre est la source. Cette expression n'est plus valable si le cône est trop ouvert. La portion de sphère s'écarte du plan tangent qu'est la pupille. On a donc,

$$F_{\text{entrant dans PE}} = F_{\text{total source}} \times \frac{S_{PE}}{4\pi R^2} = \frac{F_{\text{total source}}}{4\pi} \times \frac{S_{PE}}{R^2}$$

Après regroupement deux à deux, il vient,

$$F_{\text{entrant dans PE}} = \frac{F_{\text{total source}}}{4\pi} \times \frac{S_{PE}}{R^2}$$

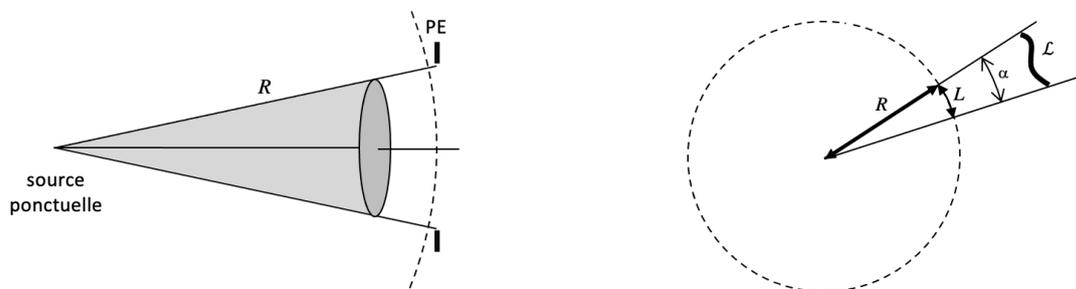


Figure : notion d'angle solide.

Le deuxième terme de l'égalité représente un équivalent tridimensionnel d'un angle plan qu'on appelle **angle solide** et habituellement noté  $\Omega$ . Son unité est le **stéradian (sr)**. L'angle plan  $\alpha$ , sous lequel est vu une courbe  $\mathcal{L}$  depuis un point est défini, dans l'espace bidimensionnel, comme le rapport de la longueur  $L$  de l'arc projeté de  $\mathcal{L}$  sur un cercle de rayon  $R$ . L'angle solide d'une surface quelconque est défini de façon analogue comme le rapport de la superficie projetée de la surface sur une sphère de rayon  $R$  sur son rayon au carré. Première constatation, l'angle solide de tout l'espace est égal à  $4\pi$ .

$$\Omega_{\text{espace}} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ sr}$$

Le premier terme représente alors le flux émis par la source de façon isotrope (car c'est une source ponctuelle) dans l'angle solide correspond à tout l'espace. C'est un flux par unité d'angle solide. On parle d'**intensité** dont l'unité énergétique est le **W.sr<sup>-1</sup>** et l'unité visuelle est le **candela** (équivalent à des **lm.sr<sup>-1</sup>**).

$$I = \frac{dF}{d\Omega}$$

L'intensité d'une source ponctuelle ou quasi-ponctuelle est donc la grandeur photométrique pertinente. Sa connaissance permet de calculer le flux entrant dans un instrument via la notion d'angle solide. La variation de l'intensité lumineuse en fonction de la direction d'émission s'appelle le diagramme de rayonnement. Sa connaissance (en fonction des coordonnées d'espace) permet de calculer le flux qui passe par une surface  $S$  quelconque. Dans le cas de coordonnées polaires on peut écrire,

$$F_S = \int_{\theta} \int_{\varphi} I(\theta, \varphi) d\Omega$$

Où  $d\Omega$  représente un angle solide élémentaire s'appuyant sur une surface élémentaire. Si l'intensité est constante dans la surface considérée (cas d'une source isotrope par exemple) alors le calcul du flux se ramène à un calcul d'angle solide par intégration sur la surface d'un angle solide élémentaire.

### Angle solide élémentaire

Dans le cas d'une surface infinitésimale  $dS$ , sa projection sur la sphère sera elle-même si sa normale est colinéaire au rayon. Dans le cas où l'élément de surface présente une obliquité, la surface apparente projetée sur la sphère est réduite du cosinus de l'angle d'inclinaison. L'expression générale de l'angle solide élémentaire vaut donc, pour une surface oblique,

$$d\Omega = \frac{dS \times \cos\theta}{R^2}$$

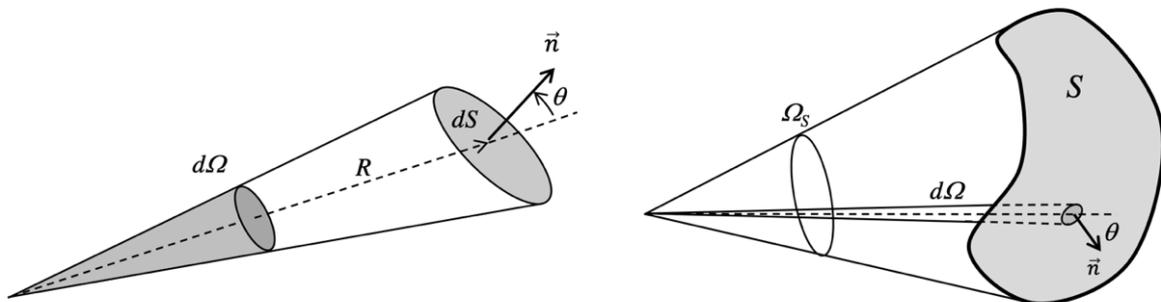


Figure : Angle solide élémentaire et angle solide quelconque.

### Angle solide quelconque

L'angle solide sous lequel est vue une surface quelconque est plus complexe à calculer. Il faut découper la surface en surfaces élémentaires et intégrer. Pour chaque élément de surface, l'obliquité et la distance au point où on veut déterminer l'angle solide, vont varier.

$$\Omega_S = \int d\Omega = \iint \frac{dS \times \cos\theta_{dS}}{R_{dS}^2}$$

### Angle solide d'un disque

Une pupille d'entrée d'un instrument (non obturé) est souvent un disque. Du point objet sur l'axe elle est, par définition de l'ouverture numérique, vue sous un angle  $\alpha$ .

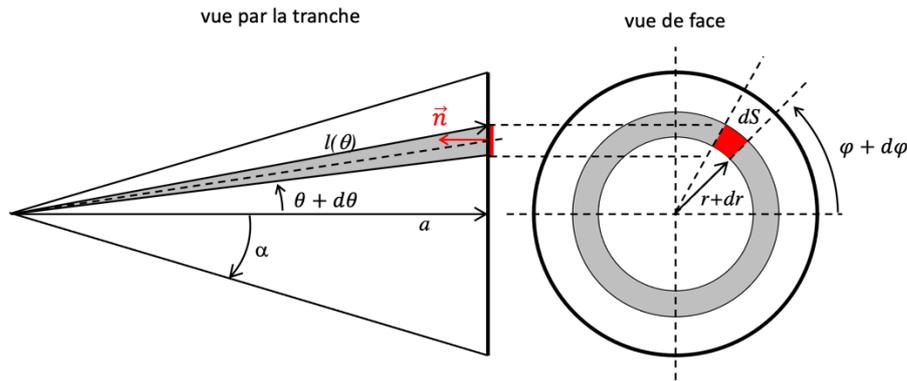


Figure : grandeurs pour le calcul de l'angle solide d'un cône.

$$\Omega_{disque} = \int_{disque} d\Omega = \int_{disque} \frac{dS \times \cos\theta}{l(\theta)^2} = \int_{disque} \frac{rd\phi dr \times \cos\theta}{l(\theta)^2}$$

On a également,

$$r = a \times \tan\theta \rightarrow dr = \frac{a d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$a = l(\theta) \cos\theta$$

$$\Omega_{disque} = \int_{disque} \frac{a \tan\theta d\phi \frac{a d\theta}{\cos^2\theta} \times \cos\theta}{\frac{a^2}{\cos^2\theta}}$$

$$\Omega_{disque} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\alpha d\theta \sin\theta$$

L'angle solide élémentaire d'une couronne est  $d\phi d\theta \sin\theta$ . L'intégrale est simple à calculer, soit,

$$\Omega_{disque} = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Si on considère le demi-espace, à savoir  $\alpha = \pi/2$ , on retrouve que l'angle solide vaut  $2\pi$ . Si le disque est vu sous un petit angle (c'est le cas de l'optique paraxiale) alors on retrouve l'expression de l'angle solide élémentaire (sans obliquité),

$$\Omega_{disque} \approx \pi\alpha^2 \approx \pi \left( \frac{\phi_{PE}}{2d} \right)^2 = \frac{S_{PE}}{d^2}$$

Exemple : clarté dans un instrument visuel

On considère une étoile définie par son intensité. Le flux reçu dans l'œil est le produit de l'intensité de l'étoile et de l'angle solide qui s'appuie sur la pupille de l'œil. Si l'étoile est vue à travers un instrument alors le flux reçu dans l'œil est celui qui passe par la pupille d'entrée de l'instrument, en tenant compte des pertes et en supposant que la pupille de sortie est plus petite que celle de l'œil. On appelle la clarté de l'instrument le gain en flux qui passe par la pupille de l'œil. On a,

$$C = \frac{F_{instru}}{F_{sans}} = \frac{\tau \times I_{source} \times \Omega_{PE}}{I_{source} \times \Omega_{oeil}} \approx \tau \times \frac{S_{PE}}{S_{oeil}} \approx \tau \times \frac{S_{PE}}{S_{PS}} = \tau \times G^2$$

La clarté est proportionnelle au carré du grossissement de l'instrument. On voit donc beaucoup plus d'étoiles avec une lunette d'astronomie qu'à l'œil nu !

### 3. Source non ponctuelle – notions de luminance et d'étendue

Dans le cas d'une source non ponctuelle, ou source étendue, le flux entrant dans la pupille d'entrée de l'instrument est la somme des flux de tous les points de la source contenu dans le champ de l'instrument. La notion d'intensité vue précédemment ne peut plus être utilisée directement.

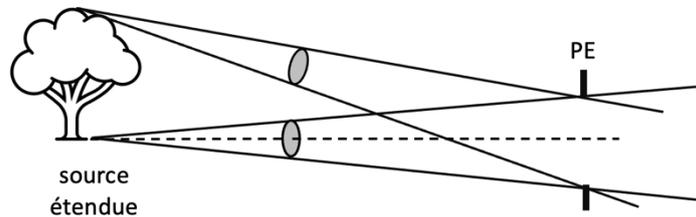


Figure : angle solide dans le champ.

Puisqu'un objet est une infinité de sources ponctuelles, la somme précédemment évoquée tend vers l'infini. Pour s'en sortir il suffit d'intégrer sur la surface émissive une grandeur dont les dimensions sont celle d'un flux (émis) par unité de surface. C'est comme un éclairage mais en émission. Cette grandeur s'appelle l'**exitance**  $\mathcal{E}_S$  (ou **émittance**). Si ensuite on réintroduit le flux émis par l'élément de surface considéré comme le produit d'une intensité et d'un angle solide, il vient alors en supposant également que la taille de la source est petite devant la pupille et que l'intensité ne varie pas trop sur l'objet,

$$F_{entrant\ dans\ PE} = \int_{Source} \mathcal{E}_{Source} dS = \int_{Source} \frac{I_{Source} \Omega_{S \rightarrow PE}}{S} dS \approx \frac{I_{Source}}{S} \times \Omega_{S \rightarrow PE} S$$

Le deuxième terme est le produit de l'angle solide qui part de la source qui s'appuie sur la pupille d'entrée et de la surface de la source  $S$ . Cette grandeur caractérise le tube de rayonnement qui contient tous les rayons partant de la source et qui arrivent dans la pupille d'entrée. Cette grandeur se nomme **étendue géométrique** que nous écrivons  $G$ .

Le premier terme est une intensité par unité de surface. Cette nouvelle grandeur photométrique s'appelle la **luminance**. Son unité énergétique est le **W.sr<sup>-1</sup>.m<sup>-2</sup>** et son unité visuelle est le **cd.m<sup>-2</sup>** (appelé **nit**). La luminance est le flux par unité d'étendue géométrique. C'est la grandeur pertinente lorsque la source n'est pas ponctuelle.

$$L = \frac{dF}{dG}$$

La luminance peut varier sur la source (coordonnées  $x, y$ ) et peut varier en direction d'émission (coordonnées  $\theta, \varphi$ ). La détermination du flux émis à travers une surface par une source de luminance non constante nécessite de calculer une intégrale,

$$F_{Source \rightarrow PE} = \int L(x, y, \theta, \varphi) dG$$

Si la luminance est constante, on dit que la source est lambertienne (ou orthotrope). Dans ce cas l'intégrale précédente se ramène à un calcul d'étendue géométrique.

$$F_{Source \rightarrow PE} = L \times \int dG$$

Où  $dG$  représente l'étendue géométrique élémentaire entre deux surfaces élémentaires.

### Étendue géométrique élémentaire

Considérons deux surfaces élémentaires  $dS_1$  et  $dS_2$  séparées d'une distance  $d$  et présentant une obliquité  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par rapport à la directrice.

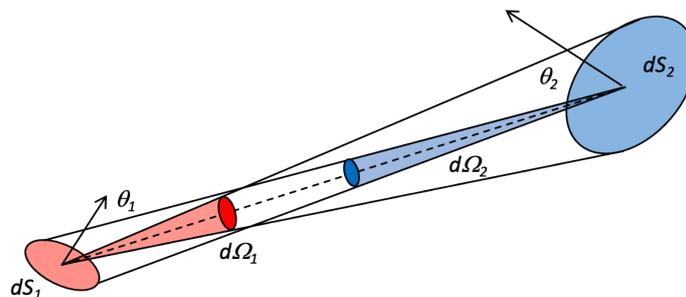


Figure : l'étendue géométrique élémentaire.

On a vu que l'étendue géométrique est le produit d'une surface et de l'angle solide sous lequel la surface voit une autre surface. On a donc

$$dG = dS_1 \times \cos\theta_1 \times d\Omega_1$$

L'angle solide élémentaire a été décrit ci-dessus et on a également,

$$dG = dS_1 \times \cos\theta_1 \times \frac{dS_2 \times \cos\theta_2}{d^2}$$

En remaniant cette expression on obtient,

$$dG = \frac{dS_1 \times \cos\theta_1}{d^2} \times dS_2 \times \cos\theta_2 = d\Omega_2 \times dS_2 \times \cos\theta_2$$

L'étendue géométrique élémentaire peut s'écrire indépendamment de l'une ou l'autre surface.

Si la taille des surfaces est petite devant la distance les séparant, cette expression peut être utilisée. C'est généralement le cas en optique paraxiale.

## Étendue géométrique entre une petite surface et un disque

C'est le cas usuel en optique paraxiale. Une petite surface objet  $S$  éclaire la pupille d'entrée d'un système optique. Le calcul de l'étendue géométrique doit donc tenir compte du fait que sur la surface objet l'obliquité varie. En utilisant l'angle solide élémentaire sur une couronne, il vient alors l'intégrale suivante pour déterminer l'étendue entre la petite surface  $S$  et une autre surface « pupille d'entrée » vue sous l'angle  $\alpha$ ,

$$G_{S-PE} = \int dG = \int dS \cos\theta \times d\Omega_{\text{couronne}} = \int_S dS \int_0^\alpha \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$G_{S-PE} = \pi S \times \sin^2 \alpha$$

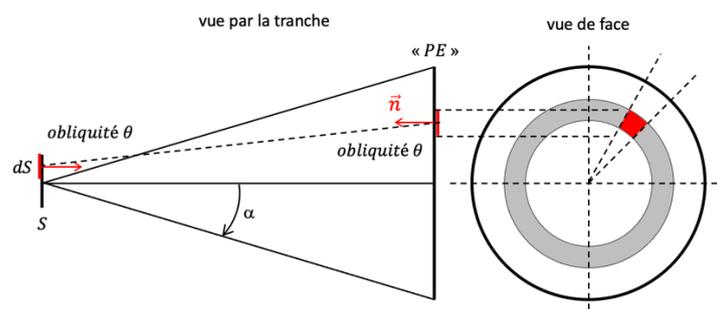


Figure : grandeurs pour le calcul de l'étendue géométrique surface/cône.

L'étendue géométrique entre la petite surface et le demi-espace vaut  $\pi S$ . Le flux émis dans le demi-espace de notre petite surface, ayant une luminance  $L$  supposée lambertienne, vaut simplement  $\pi L S$ .

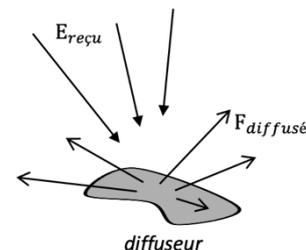
Dans le cas usuel des petites ouvertures, l'étendue géométrique se simplifie et on retrouve l'expression de l'étendue élémentaire entre  $S$  et la surface de la pupille d'entrée située à distance  $d$  sans obliquité,

$$G_{S-PE} = \pi S \times \alpha^2 = \pi S \times \left(\frac{\phi_{PE}}{2d}\right)^2 = \frac{S \times S_{PE}}{d^2}$$

## Luminance d'un diffuseur lambertien

La luminance d'un diffuseur « parfait », c'est-à-dire lambertien, de surface  $S$  peut être évaluée simplement par l'éclairement qu'il reçoit de la source qui l'éclaire. Écrivons le flux que le diffuseur réémet en introduisant  $\rho$  le facteur de réflectivité de la surface, appelée albedo.

$$F_{\text{diffusé}} = \rho \times F_{\text{reçu}}$$



Le diffuseur étant lambertien, il émet dans le demi-espace. On a donc également

$$F_{\text{diffusé}} = \pi S \times L_{\text{diffuseur}} = \rho \times F_{\text{reçu}}$$

On en déduit alors sa luminance,

$$L_{\text{diffuseur}} = \frac{\rho}{\pi} \times E_{\text{reçu}}$$

### Conservation de l'étendue optique et implications

Considérons une étendue géométrique élémentaire à la traversée d'un dioptre ou à la réflexion sur une surface. Écrivons l'étendue de part et d'autre d'une interface

$$dG_i = dS_i \cos\theta_i d\Omega_i \text{ où } i = 1,2$$

L'angle solide élémentaire en coordonnées sphériques est équivalent à celui déterminé plus haut pour la couronne,

$$d\Omega_i = d\varphi_i d\theta_i \sin\theta_i$$

$d\varphi_i$  représente l'angle projeté sur le plan de l'interface et  $d\theta_i$  celui projeté sur le plan d'incidence aux rayons. La réflexion ou la réfraction imposent la conservation des grandeurs  $d\varphi_i$  et  $n_i \sin\theta_i$ , où  $n_i$  est l'indice des milieux. Par dérivation on obtient également la conservation du terme  $n_i \cos\theta_i d\theta_i$ . En réécrivant l'étendue géométrique comme,

$$dG_i = dS_i \cos\theta_i d\varphi_i d\theta_i \sin\theta_i$$

Et en considérant les invariants vus ci-dessus, on démontre simplement que l'**étendue optique élémentaire**, produit du carré de l'indice et de l'étendue géométrique élémentaire, se conserve.

$$\Rightarrow n_1^2 dG_1 = n_2^2 dG_2$$

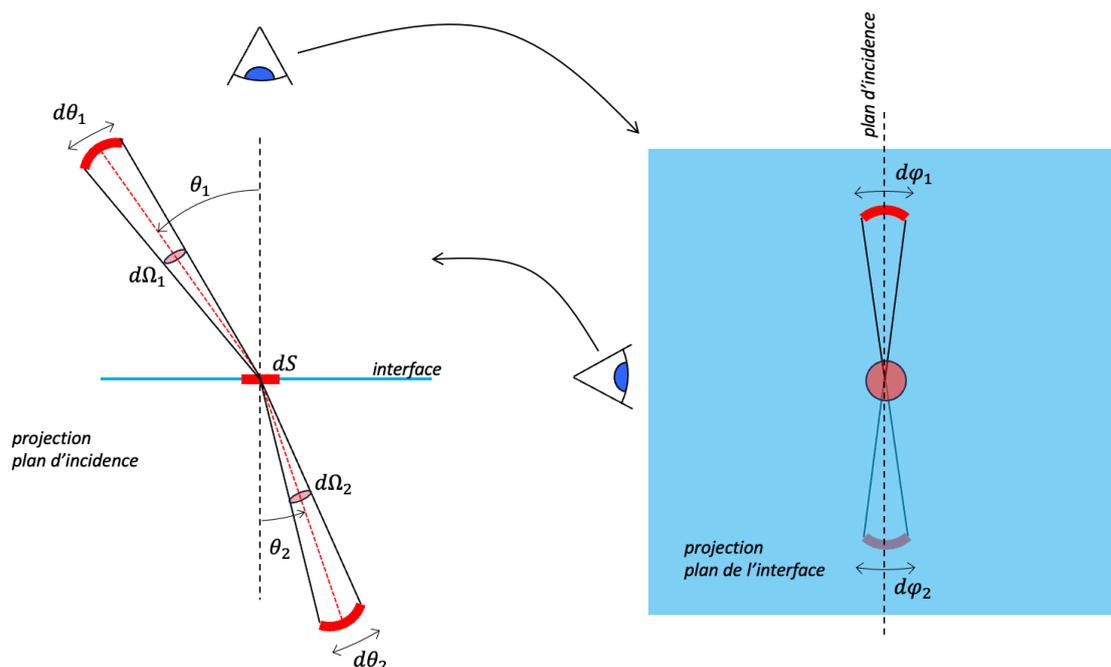


Figure : vues en projection de l'étendue géométrique à la traversée d'un dioptre.

Nous avons vu au début de ce chapitre que le flux entrant dans la pupille d'entrée se conserve, aux pertes près, dans la pupille de sortie d'un instrument. Le flux reçu dans l'image est donc,

$$F_{image} = F_{sortant\ de\ PS} = \tau \times F_{entrant\ dans\ PE}$$

Nous pouvons réécrire cette expression en faisant intervenir la luminance et l'étendue géométrique.

$$L_{image} \times dG_{image-PS} = \tau \times L_{objet} \times dG_{objet-PE}$$

On déduit également que la luminance dans l'image se conserve aux pertes près et au rapport des indices, c'est le théorème de Clausius,

$$\Rightarrow L_{image} = \tau \times \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \times L_{objet}$$

Ce résultat fondamental dit que la luminance de l'image ne pourra pas dépasser celle de l'objet (si les indices sont égaux, cas le plus usuel). Autrement dit, si l'objet est le Soleil et qu'on concentre le flux lumineux (on fait son image au foyer d'un système optique) pour chauffer un fluide alors la température du fluide ne pourra pas dépasser celle du Soleil en vertu du principe de Clausius.

Dans un système optique formant une image, la conservation de l'étendue géométrique est toujours valable au passage des dioptries ou miroirs. En revanche pour écrire l'étendue géométrique entre l'image et la pupille de sortie (même pour des ouvertures importantes) il est nécessaire d'assurer la condition d'aplanétisme. En effet si cette condition n'est pas respectée (figure ci-dessous), une petite portion de l'image sera formée par des points différents de l'objet qui ne sont pas directement conjugués et on ne peut pas appliquer l'expression de l'étendue entre la surface image et la pupille de sortie aussi directement que vu précédemment.

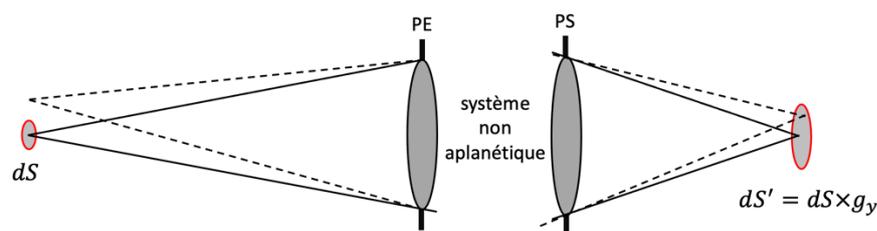


Figure : conservation de l'étendue dans un système optique.

Supposons donc notre système aplanétique, alors on a,

$$L_{image} \times \pi dS' \sin^2 \alpha' = \tau \times L_{objet} \times dS \sin^2 \alpha$$

En utilisant la conservation de la luminance on retrouve la relation fondamentale de l'optique instrumentale, la relation des sinus d'Abbe, la conservation du produit  $n \times y \times \sin \alpha$ .

## Éclairement dans une image

A partir des expressions ci-dessus, le calcul de l'éclairement dans l'image d'un système aplanétique est aisé. On obtient, pour un objet sur l'axe,

$$E_{image} = \frac{F_{image}}{S_{image}} = \pi \times \tau \times L_{objet} \times \sin^2 \alpha'$$

Dans le cas d'un système qui travaille proche de la conjugaison infini-foyer l'éclairement se simplifie et s'écrit,

$$E_{image} = \frac{\pi \tau L_{objet}}{4N^2}$$

On voit que l'éclairement est inversement proportionnel au carré du nombre d'ouverture. C'est cette relation qui a motivé d'utiliser une série de raison  $\sqrt{2}$  sur les objectifs d'appareil photographique : 1 – 1,4 – 2,8 – 3,6 – 4 – 5,6 – 8 – 11 – 16 ... Passer d'un nombre d'ouverture au suivant augmente ou diminue le diamètre de la pupille d'un facteur  $\sqrt{2}$  soit une variation d'un facteur 2 sur la surface et donc le temps de pause associé.

- Exemple : facteur de concentration

On définit le facteur de concentration comme le gain en éclairement au foyer d'un système optique. Par exemple, un concentrateur solaire qui forme une image du Soleil à son foyer aura un éclairement plus élevé que l'éclairement fourni au sol. L'éclairement au foyer, d'un système optique d'ouverture numérique image  $\alpha'$ , a été déterminé ci-dessus et l'éclairement au sol se calcule aisément en introduisant l'angle  $\beta$  sous lequel est vu le Soleil depuis la Terre.

$$C = \frac{E_{foyer}}{E_{sol}} = \frac{\pi \times \tau \times L_{soleil} \times \sin^2 \alpha'}{\pi \times L_{soleil} \times \sin^2(\beta/2)}$$

En supposant le système aplanétique, il vient,

$$C = \frac{\tau}{(N\beta)^2}$$

Le Soleil est vu sous  $0,5^\circ$ . Si on suppose que le système n'a aucune perte et qu'il est ouvert à son maximum, soit  $N=1/2$  alors le facteur de concentration maximale vaut environ 40000. Le four solaire d'Odeillo, situé dans les Pyrénées, est une parabole de 40 mètres de diamètre et 18 mètres de rayon de courbure. Il concentre la lumière à son foyer et permet d'obtenir des températures très élevées ( $3500^\circ$ ) en quelques secondes. L'installation accueille une équipe de recherche de l'Université de Perpignan qui travaille sur les études thermiques à haute température, les systèmes caloporteurs, la conversion de l'énergie, le craquage de l'eau pour produire de l'hydrogène, le comportement des matériaux à haute température dans des environnements extrêmes. Son facteur de concentration est de 16000. L'écart est lié au défaut de forme (la parabole est construite avec 9500 facettes courbées mécaniquement) et aux aberrations (une parabole n'est pas aplanétique).

- Exemple : clarté dans un instrument visuel

Reprenons le calcul de la clarté, vu dans le cas d'une source ponctuelle (les étoiles), au cas d'une source étendue comme une galaxie à travers un lunette d'astronomie ou une scène forestière à travers une lunette terrestre. L'image sur la rétine sera donc étendue elle-aussi. La clarté est donc ici le gain en éclairement de la rétine et non celui en flux dans le cas d'une source ponctuelle. On a,

$$C = \frac{E_{instru}}{E_{sans}}$$

En vertu de la conservation de l'étendue géométrique, si la pupille de sortie de l'instrument est plus grande que celle de l'œil alors la clarté vaut simplement le facteur de transmission  $\tau$ . En revanche si la pupille de sortie est plus petite que celle de l'œil, l'étendue utile est définie par la surface de la pupille de sortie et on a,

$$C = \tau \times \frac{S_{PS}}{S_{oeil}}$$

Au mieux la clarté vaut le coefficient de transmission (qui vaut 1 dans le meilleur des cas). C'est le cas d'une loupe où c'est forcément l'œil qui limite l'ouverture et donc la pupille de sortie utile vaut celle de l'œil. Si c'est l'instrument qui fixe l'ouverture (PS plus petite que l'œil) alors la clarté chutera, ce qui est le cas des lunettes ou télescopes astro. Autrement dit le fond noir de l'espace sera plus noir à travers une lunette qu'à l'œil nu.

### Éclairage dans le champ de pleine lumière

Nous avons défini le champ de pleine lumière comme étant la portion du champ où tous les rayons passant dans la pupille d'entrée ressortent dans la pupille de sortie pour construire l'image. D'un point de vue photométrique il est nécessaire de tenir compte de l'obliquité de l'élément de surface qui éclaire la pupille d'entrée. La pupille est elle aussi oblique par rapport à la directrice et la directrice a une longueur corrigée par rapport à la distance objet-pupille sur l'axe. L'étendue géométrique est donc,

$$dG_{dS(\theta)-PE} = \frac{dS \cos\theta \times S_{PE} \cos\theta}{(d/\cos\theta)^2} = dG_{dS(\theta=0^\circ)-PE} \times \cos^4\theta$$

On voit donc que l'étendue évolue à la puissance 4ème de l'angle de champ. Cette évolution dans le champ se retrouve également sur l'image. Cette variation, parfois appelée dôme photométrique, amène à une diminution de l'éclairage pour les points de l'image dans le champ.

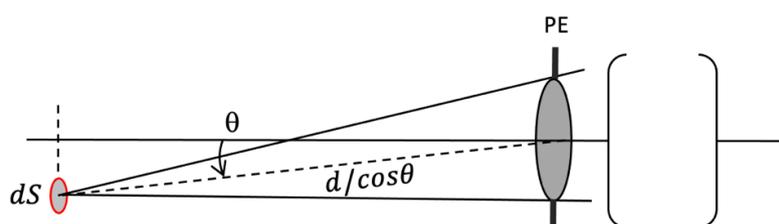


Figure : étendue dans le champ de pleine lumière.

## Glossaire Anglais-Français

angle d'incidence	angle of incidence
angle d'incidence	incidence angle, angle of incidence
angle de réfraction	angle of refraction
aplanétique	aplanetic
axe optique	optical axis
champ / champ d'observation	field / field of view
chemin optique	optical path
conception optique	lens design
condenseur	condenser
condition des sinus (d'Abbe)	(Abbe) sine condition
convexe	convex
défaut de mise au point	defocusing
détecteur	detector
déviation	deflection
diaphragme	stop
diffraction en champ lointain (à l'infini)	far field diffraction
diffusion de la lumière	light scattering
dioptre	refracting surface
distance focale	focal length
distance frontale	working distance
faisceau	beam
faisceau collimaté	collimated beam
faisceau lumineux	light beam
figure/tache de diffraction	diffraction pattern
flou (nom) / flou (adjectif)	blur/blurred
foyer	focus, focal point
grandissement (transversal ou axial)	transverse/lateral or axial magnification
grossissement	magnifying power
hors axe	off-axis
image réelle	real image
image virtuelle	virtual image
incertitude	uncertainty
incidence rasante	grazing incidence
indice de réfraction	refractive index
intensité	luminous intensity
jumelles	binoculars
lame à faces parallèles	parallel plate
lame couvre objet	coverslip
lentille convergente	converging lens
lentille divergente	diverging lens
lentille, objectif	lens
longueur d'onde	wavelength
loupe	magnifying glass
lumière (image) parasite	spurious light/image

lumière parasite	stray light
luminance	luminance
lunette, télescope	telescope
mettre au point / focalisation	to focus / focusing
milieu	medium
miroir	mirror
montage optique	optical set-up
nombre d'ouverture	aperture ratio number, F-value, F-number
objectif grand angle	wide angle lens
objet	object
oculaire	eyepiece
onde plane	plane wave
onde sphérique	spherical wavefront
ouverture	aperture (stop)
ouverture numérique	numerical aperture
plan focal	focal plane
planéité	flatness
points conjugués	conjugated points
poli (polir)	(to) polish
profondeur de champ	depth of field
puissance (vergence)	power (of a lens)
pupille d'entrée	entrance pupil
pupille de sortie	exit pupil
rayon d'ouverture centre champ - bord pupille	axial ray
rayon de champ bord champ - centre pupille	chief ray
rayon de courbure	radius of curvature
rayon lumineux	light ray
rayon oblique (hors plan méridien)	skew ray
rayon paraxial	paraxial ray
réflexion	reflection
réponse percutiennelle	point spread function (PSF)
revêtement (couche mince)	coating
silice	(fused) silica
source ponctuelle	point source
sténopé	pinhole camera
surface rugueuse	rough surface
système dioptrique	dioptric system
tache d'Airy	Airy pattern
téléobjectif	telephoto lens
télescope	reflecting telescope
tirage	(free) working distance
tirage (du foyer)	back focal distance, back focus
transmission	transmittance
trou	pinhole
verre dépoli	ground glass
vignettage, œil de chat	vignetting, cat's eye