

Télescopes à miroirs (3 séances)

Configuration Cassegrain

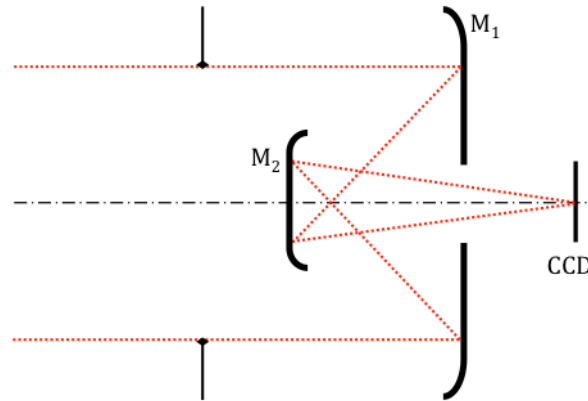
Un télescope à deux miroirs de type Cassegrain est constitué d'un miroir primaire concave et d'un miroir secondaire convexe. On appelle f , f_1 , f_2 les focales du télescope, du miroir primaire et du miroir secondaire. Le télescope est réglé pour un objet à l'infini vu sous un angle θ et projette l'image finale sur un capteur matriciel. On considère les caractéristiques suivantes,

- Miroir primaire M_1 concave : $R_1 = 250$ mm
- Miroir secondaire M_2 convexe : $R_2 = 100$ mm
- Focale totale = 500 mm et nombre d'ouverture $N = 5$
- Pupille d'entrée : diaphragme placé à 250 mm en avant de M_1
- Capteur matriciel de 512 x 512 pixels carrés de 20 μ m de côté
- Coefficient de réflexion de chaque miroir : 98%

1. Faire un schéma de principe du télescope Cassegrain en plaçant les foyers F_1 , F_2 , le foyer du télescope F' et le plan principal H' . En déduire le signe de la focale du télescope.
2. Quelle est la suite des conjugaisons réalisées par les deux miroirs du télescope pour un objet à l'infini vu sous un angle apparent θ ? En déduire une relation entre f , f_1 et le grandissement transversal du miroir secondaire g_{M_2} .
3. A l'aide d'une formule de grandissement (pour le miroir secondaire), déterminer la distance entre les deux foyers F_1F_2 , puis la distance entre les deux sommets des miroirs S_1S_2 et la distance entre le miroir primaire et le foyer image S_1F' .
4. Retrouvez la distance entre les deux sommets des miroirs en dépliant entièrement le système (équivalent dioptrique) et en appliquant la formule de Gullstrand.
5. Représentez le télescope sur un schéma (échelle transverse $\times 1$ / longitudinale $\times 1/2$). Puis tracer deux rayons, provenant d'un point à l'infini sur l'axe, à travers le système et s'appuyant sur les pupilles. Trouvez graphiquement la position de la pupille de sortie.
6. Calculez la position et le diamètre de la pupille de sortie du système.
7. Quel doit être le rayon minimum du champ de pleine lumière pour couvrir tout le détecteur ? En déduire le champ de pleine lumière dans l'espace intermédiaire et dans l'espace objet.
8. Tracer un faisceau de rayons provenant d'un point à l'infini s'appuyant sur la pupille d'entrée et dont l'image par le système donne un point au bord du champ de pleine lumière.
9. Déterminer les diamètres minima du miroir primaire et de son ouverture circulaire centrale, du miroir secondaire et de sa monture (spécifiée également pour arrêter les rayons parasites). En déduire le taux d'obturation de ce télescope ?
10. Comparez la limite de diffraction (le diamètre de la tâche d'Airy) et la dimension des pixels pour une longueur d'onde de 500 nm. En déduire la résolution dans l'espace objet.
11. Quel est l'éclairement dans le plan image pour un objet étendu placé à l'infini sur l'axe de diamètre angulaire 1° et de luminance uniforme $L=10\text{kW/m}^2/\text{sr}$?

Configuration Gregory

Un télescope de Grégory est constitué d'un miroir primaire concave M_1 de rayon de courbure **500 mm** et d'un miroir secondaire concave M_2 de rayon de courbure **140 mm**. On veut que la focale du télescope soit en valeur absolue de **1000 mm**. La pupille d'entrée est placée au centre de courbure du miroir M_1 et son diamètre est **100 mm**.

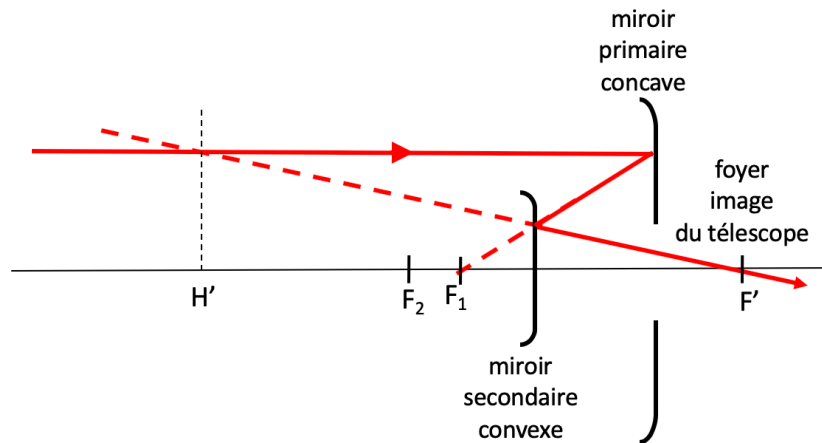


On montre (mais vous devez essayer de retrouver ces résultats) que le grandissement du miroir secondaire est -4 , que la distance entre les miroirs est $337,5$ mm et que la distance entre le miroir primaire et le foyer image du télescope est $+12,5$ mm.

1. Sur l'annexe (échelle transverse $\times 1$ / longitudinale $\times 1/2$) positionnez graphiquement la pupille de sortie (vous pourrez vérifier chez vous par le calcul son diamètre et sa position).
2. Tracer deux rayons provenant d'un objet ponctuel à l'infini sur l'axe s'appuyant sur les deux bords de la pupille d'entrée et traversant l'ensemble du télescope.
3. On souhaite couvrir un champ de pleine lumière objet circulaire de diamètre angulaire 2° . Quelle est la taille du champ image correspondant ?
4. Sur l'annexe tracer deux rayons issus du bord du champ de pleine lumière et traversant l'ensemble du télescope.
5. Déterminer en mesurant à la règle le diamètre du miroir M_2 , le diamètre de M_1 et le diamètre du trou dans M_1 pour obtenir ce champ. En déduire le taux d'obturation.
6. La distance entre les miroirs M_1M_2 peut varier dans le temps à cause de dilatations d'une petite quantité ε . En supposant que la distance entre le miroir M_1 et le détecteur reste fixe (pixel à $20 \mu\text{m}$), quelle variation maximale ε peut-on tolérer pour que l'image d'un point à l'infini reste nette sur le détecteur ?

CORRECTION CASSEGRAIN

- Il faut que le miroir secondaire conjugue un objet virtuel (placé en F_1) et une image réelle placée en F' . Donc il faut que l'objet (F_1) pour le secondaire soit situé entre F_2 et S_2 . Dans le Cassegrain la distance algébrique entre H' et F' est positive.



$$2. \infty \xrightarrow{M_1} F_1 \xrightarrow{M_2} F'$$

$$\theta \xrightarrow{M_1} y' = -f_1 \theta \xrightarrow{M_2} y'' = g_2 y' = -g_2 f_1 \theta = f' \theta$$

Ma convention de signe impose que $f = \overline{S\overline{F}}$ donc ici f_1 est négatif (-125 mm), mais la focale du télescope f' est bien positif. Il vient que $g_2 = -\frac{f'}{f_1} = +4$

$$3. g_2 = -\frac{\overline{S_2\overline{F_2}}}{\overline{F_2\overline{F_1}}} \rightarrow \overline{F_2\overline{F_1}} = 12,5\text{mm} \rightarrow \overline{S_1\overline{S_2}} = \overline{S_1\overline{F_1}} + \overline{F_1\overline{F_2}} + \overline{F_2\overline{S_2}} = -87,5\text{mm}$$

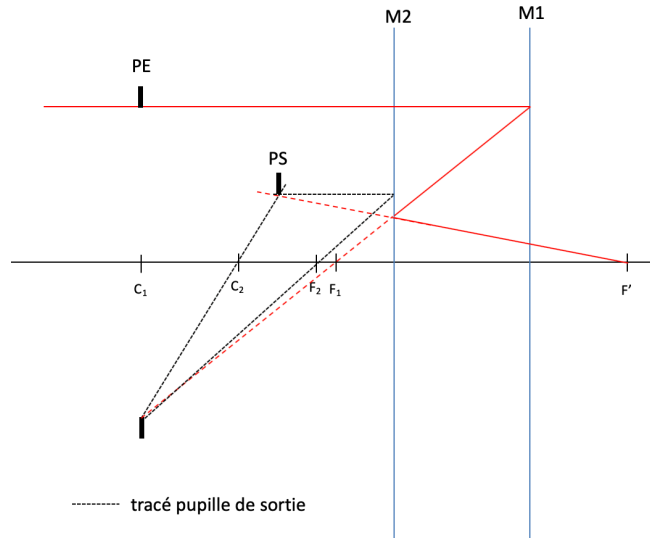
On écrit la conjugaison $F_1 \xrightarrow{M_2} F'$ (on utilise le g_2) soit $\overline{S_1\overline{F'}} = 62,5\text{mm}$

- En dépliant le système, on se ramène à un système constitué d'une lentille mince convergente de focale +125 mm (équivalent M_1) et une lentille mince divergente de focale - 50 mm (équivalent M_2). On peut appliquer la formule de Gullstrand avec la même distance focale pour tout le système soit $f' = + 500$ mm

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{\overline{O_1\overline{O_2}}}{f'_1 \times f'_2} \rightarrow \overline{O_1\overline{O_2}} = +87,5 \text{ mm}$$

On retrouve bien la valeur équivalente dans le système plié à miroirs soit -87,5 mm

5. Schéma sur l'axe (plus bas, tracé rouge)
6. La pupille d'entrée est en C_1 . Donc la pupille intermédiaire est en C_1 également mais inversée. La pupille de sortie est donc l'image de la pupille intermédiaire par le miroir M2.



On sait que le système est ouvert à $N=5$ soit $\phi_{PE} = \frac{f'}{N} = 100 \text{ mm}$

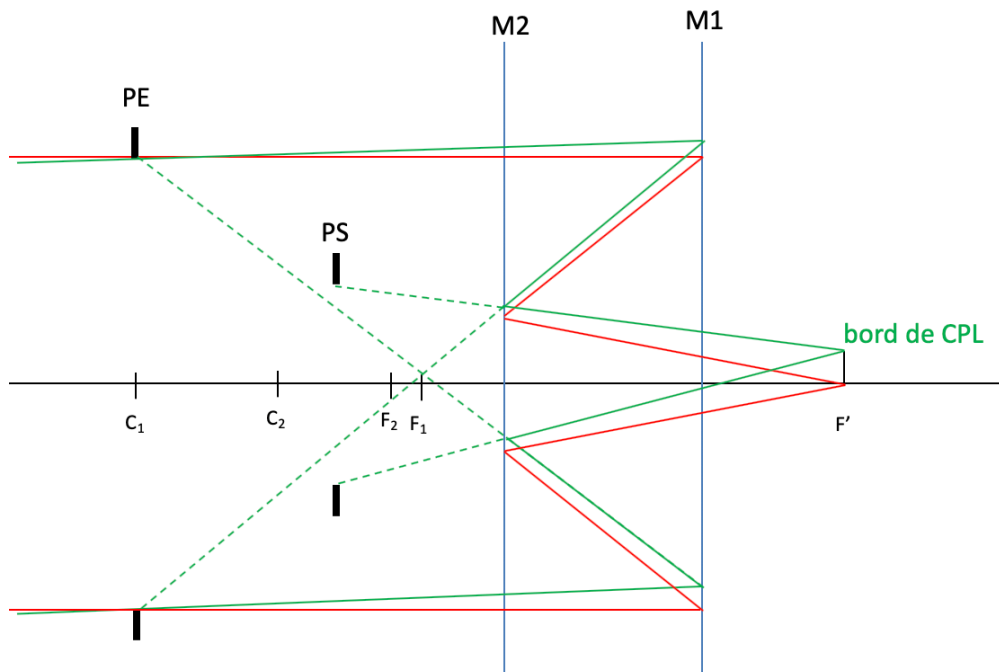
On écrit la conjugaison suivante $P_i = -P_E \xrightarrow{M2} P_S$

$$\frac{1}{S_2 P_E} + \frac{1}{S_2 P_S} = \frac{2}{S_2 C_2} \rightarrow \overline{S_2 P_S} = -72,2 \text{ mm} \rightarrow \phi_{PS} = \phi_{PE} \times \frac{\overline{S_2 P_S}}{\overline{S_2 P_E}} = 44,4 \text{ m}$$

7. Pour recouvrir entièrement le capteur, il faut que le diamètre du champ de pleine lumière vaut

$$\phi_{CPL-image} = 512 \times 20 \mu\text{m} \times \sqrt{2} = 14,5 \text{ mm} \rightarrow \phi_{CPL-intermédiaire} = \frac{\phi_{CPL}}{g_2} \rightarrow \theta_{CPL-objet} = \frac{\phi_{CPL-image}}{f'} = 1,7^\circ$$

8. Schéma en bord de CPL



9. Graphiquement (mesure à la règle) on trouve,

diamètre M1= 107 mm

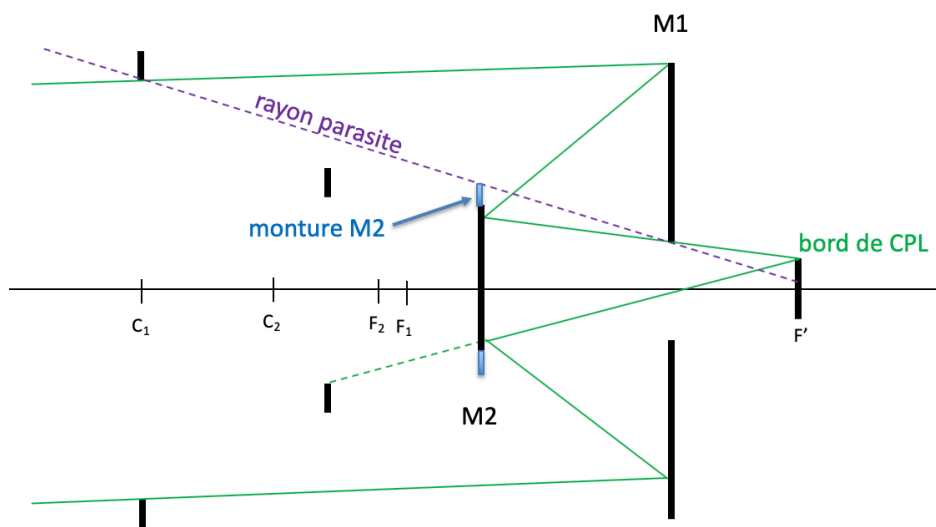
diamètre trou M1 = 23 mm

diamètre M2 = 35 mm

Pour couper les rayons parasites qui entrent dans PE et atteignent le plan focal sans passer par les miroirs, on peut augmenter le diamètre de la monture du secondaire.

diamètre monture M2 (pour couper les rayons parasites) = 50 mm

$$\text{taux d'obturation} : \tau = \left(\frac{\phi_{\text{monture}}}{\phi_{PE}} \right)^2 = 25\%$$



$$10. \phi_{\text{airy}} = 2,44\lambda N = 6 \mu\text{m} < \text{pixel} \rightarrow \delta\theta_{\text{objet}} = \frac{\text{pixel}}{f'} = 40\mu\text{rad} = 8''$$

$$11. E_{\text{image}} = T_{\text{transmission}} \times \frac{\pi L}{4N^2} = \mathcal{R}_{M1} \times \mathcal{R}_{M2} \times (1 - \tau) \times \frac{\pi L}{4N^2} = 226 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Dans le Grégory la distance algébrique entre H' et F' est négative.

$$g_2 = -\frac{f'}{f_1} = -\frac{-1000}{-250} = -4$$

$$g_2 = -\frac{\overline{S_2 F_2}}{\overline{F_2 F_1}}$$

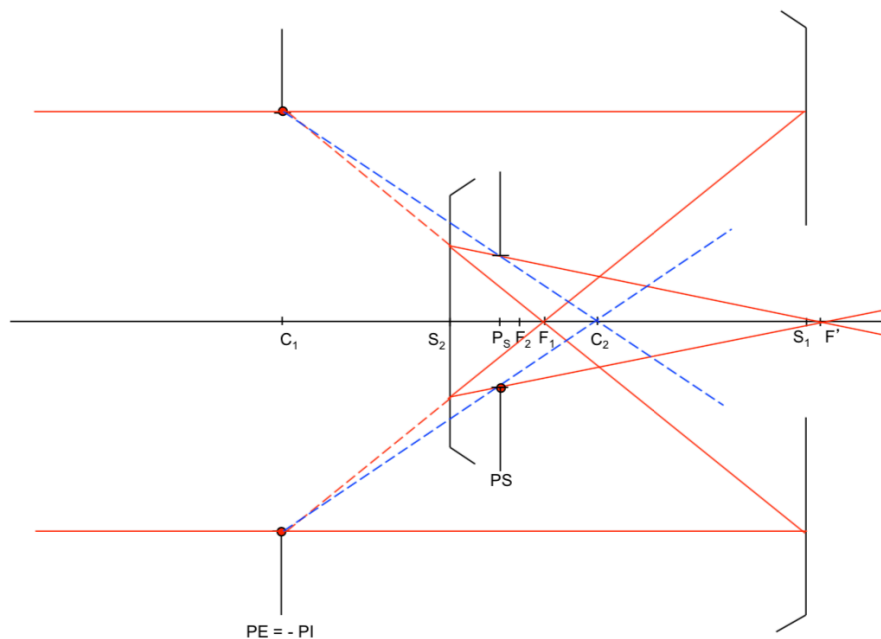
$$\rightarrow \overline{F_2 F_1} = 17,5 \text{ mm} \rightarrow \overline{S_1 S_2} = \overline{S_1 F_1} + \overline{F_1 F_2} + \overline{F_2 S_2} = -250 - 17,5 - 70 = -337,5 \text{ mm}$$

On écrit la conjugaison $F_1 \xrightarrow{M_2} F'$ (ou utilise le g_2) soit $\overline{S_1 F'} = +12,5 \text{ mm}$

1. Schéma pupille de sortie

On écrit la conjugaison suivante $P_i = -P_E = C_1 \xrightarrow{M_2} P_S$

$$\frac{1}{\overline{S_2 P_E}} + \frac{1}{\overline{S_2 P_S}} = \frac{2}{\overline{S_2 C_2}} \rightarrow \overline{S_2 P_S} = 49 \text{ mm} \rightarrow \phi_{P_S} = \phi_{P_E} \times \frac{\overline{S_2 P_S}}{\overline{S_2 P_E}} = 30 \text{ mm}$$



2. Schéma sur l'axe

3. $\phi_{CPL-image} = f' \times \theta_{CPL-objet} = 35 \text{ mm}$

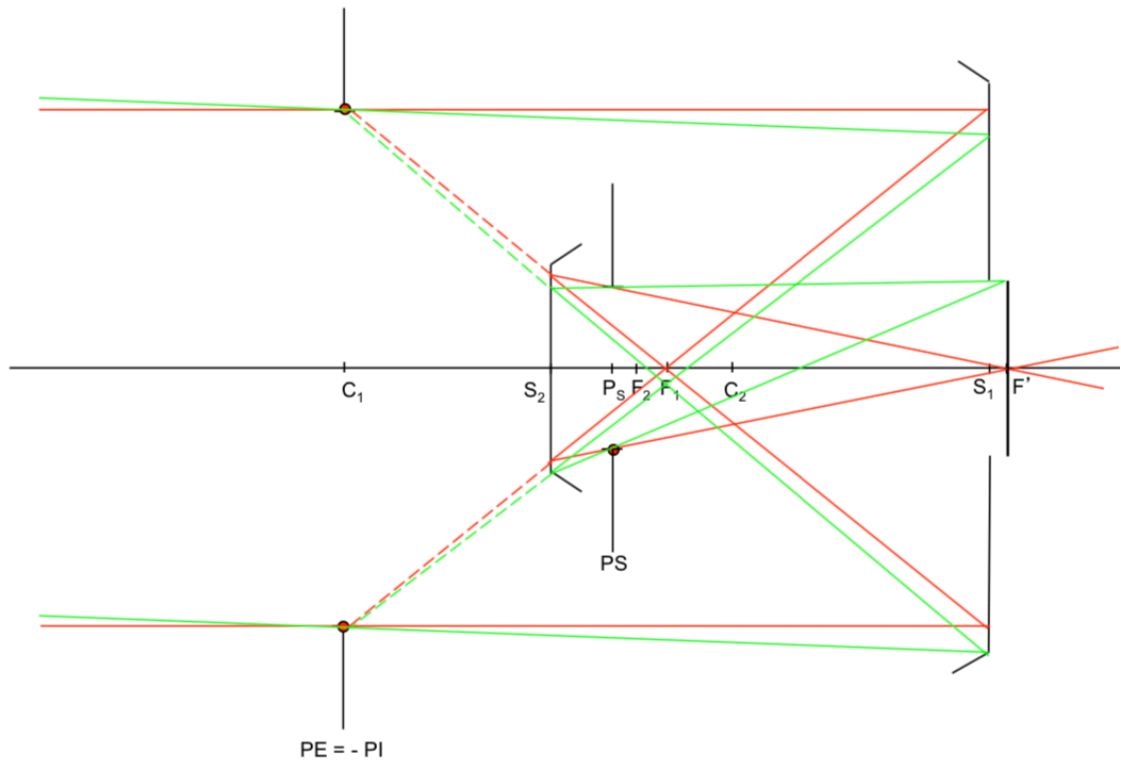
4. Schéma en bord de CPL

5. Graphiquement (mesure à la règle) on trouve,

diamètre $M_1 \sim 124 \text{ mm}$

diamètre trou $M_1 \sim 35 \text{ mm}$

diamètre $M_2 \sim 36 \text{ mm} \rightarrow \tau_{obturation} = \left(\frac{\phi_{M_2}}{\phi_{P_E}}\right)^2 = 13\%$



6. On veut que la dilatation ε soit inférieure ou égale à la profondeur de champ du secondaire dz qui est imposée par la taille du pixel. On a dans l'espace image (côté F'), une profondeur de foyer dz' ,

$$dz' \approx \frac{\text{pixel}}{ON'} = \text{pixel} \frac{P_S F'}{\phi_{PS}/2}$$

La profondeur de champ (côté objet de M_2) vaut alors,

$$dz(\geq \varepsilon) = \frac{dz'}{g_z} = \frac{dz'}{(g_{y-M_2})^2} = \frac{dz'}{16} = \text{pixel} \frac{P_S F'}{8\phi_{PS}} = 20\mu\text{m} \frac{-48,9 + 350 \text{ mm}}{8 \times 30\text{mm}} = 25 \mu\text{m}$$