

## TD8 Télescopes à miroirs (3 séances)

---

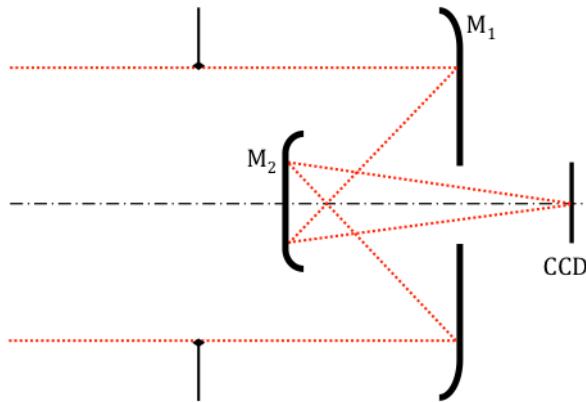
### Configuration Cassegrain

Un télescope à deux miroirs de type Cassegrain est constitué d'un miroir primaire concave et d'un miroir secondaire convexe. On appelle  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  les focales du télescope, du miroir primaire et du miroir secondaire. Le télescope est réglé pour un objet à l'infini vu sous un angle  $\theta$  et projette l'image finale sur un capteur matriciel. On considère les caractéristiques suivantes,

- Miroir primaire  $M_1$  concave :  $R_1 = 250$  mm
  - Miroir secondaire  $M_2$  convexe :  $R_2 = 100$  mm
  - Focale totale = 500 mm et nombre d'ouverture  $N = 5$
  - Pupille d'entrée : diaphragme placé à 250 mm en avant de  $M_1$
  - Capteur matriciel de 512 x 512 pixels carrés de 20 $\mu\text{m}$  de côté
  - Coefficient de réflexion de chaque miroir : 98%
1. Faire un schéma de principe du télescope Cassegrain en plaçant les foyers  $F_1$ ,  $F_2$ , le foyer du télescope  $F'$  et le plan principal  $H'$ . En déduire le signe de la focale du télescope.
  2. Quelle est la suite des conjugaisons réalisées par les deux miroirs du télescope pour un objet à l'infini vu sous un angle apparent  $\theta$  ? En déduire une relation entre  $f$ ,  $f_1$  et le grandissement transversal du miroir secondaire  $g_{M2}$ .
  3. A l'aide d'une formule de grandissement (pour le miroir secondaire), déterminer la distance entre les deux foyers  $F_1F_2$ , puis la distance entre les deux sommets des miroirs  $S_1S_2$  et la distance entre le miroir primaire et le foyer image  $S_1F'$ .
  4. Retrouvez la distance entre les deux sommets des miroirs en dépliant entièrement le système (équivalent dioptrique) et en appliquant la formule de Gullstrand.
  5. Représentez le télescope sur un schéma (échelle transverse  $\times 1$  / longitudinale  $\times 1/2$ ). Puis tracer deux rayons, provenant d'un point à l'infini sur l'axe, à travers le système et s'appuyant sur les pupilles. Trouvez graphiquement la position de la pupille de sortie.
  6. Calculez la position et le diamètre de la pupille de sortie du système.
  7. Quel doit être le rayon minimum du champ de pleine lumière pour couvrir tout le détecteur ? En déduire le champ de pleine lumière dans l'espace intermédiaire et dans l'espace objet.
  8. Tracer un faisceau de rayons provenant d'un point à l'infini s'appuyant sur la pupille d'entrée et dont l'image par le système donne un point au bord du champ de pleine lumière.
  9. Déterminer les diamètres minima du miroir primaire et de son ouverture circulaire centrale, du miroir secondaire et de sa monture (spécifiée également pour arrêter les rayons parasites). En déduire le taux d'obturation de ce télescope ?
  10. Comparez la limite de diffraction (le diamètre de la tâche d'Airy) et la dimension des pixels pour une longueur d'onde de 500 nm. En déduire la résolution dans l'espace objet.
  11. Quel est l'éclairement dans le plan image pour un objet étendu placé à l'infini sur l'axe de diamètre angulaire 1° et de luminance uniforme  $L=10\text{kW/m}^2/\text{sr}$  ?

## Configuration Gregory

Un télescope de Grégory est constitué d'un miroir primaire concave  $M_1$  de rayon de courbure **500 mm** et d'un miroir secondaire concave  $M_2$  de rayon de courbure **140 mm**. On veut que la focale du télescope soit en valeur absolue de **1000 mm**. La pupille d'entrée est placée au centre de courbure du miroir  $M_1$  et son diamètre est **100 mm**.

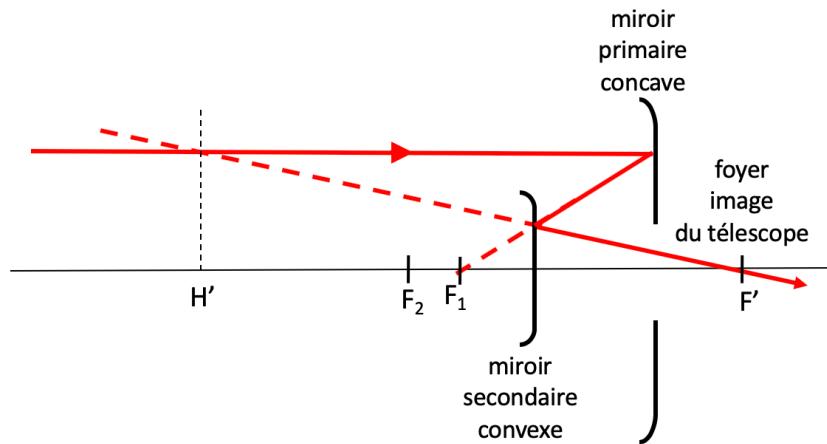


On montre (mais vous devez essayer de retrouver ces résultats) que le grandissement du miroir secondaire est  $-4$ , que la distance entre les miroirs est 337,5 mm et que la distance entre le miroir primaire et le foyer image du télescope est +12,5 mm.

1. Sur l'annexe (échelle transverse  $\times 1$  / longitudinale  $\times 1/2$ ) positionnez graphiquement la pupille de sortie (vous pourrez vérifier chez vous par le calcul son diamètre et sa position).
2. Tracer deux rayons provenant d'un objet ponctuel à l'infini sur l'axe s'appuyant sur les deux bords de la pupille d'entrée et traversant l'ensemble du télescope.
3. On souhaite couvrir un champ de pleine lumière objet circulaire de diamètre angulaire  $2^\circ$ . Quelle est la taille du champ image correspondant ?
4. Sur l'annexe tracer deux rayons issus du bord du champ de pleine lumière et traversant l'ensemble du télescope.
5. Déterminer en mesurant à la règle le diamètre du miroir  $M_2$ , le diamètre de  $M_1$  et le diamètre du trou dans  $M_1$  pour obtenir ce champ. En déduire le taux d'obturation.
6. La distance entre les miroirs  $M_1M_2$  peut varier dans le temps à cause de dilatations d'une petite quantité  $\varepsilon$ . En supposant que la distance entre le miroir  $M_1$  et le détecteur reste fixe (pixel à 20  $\mu\text{m}$ ), quelle variation maximale  $\varepsilon$  peut-on tolérer pour que l'image d'un point à l'infini reste nette sur le détecteur ?

## CORRECTION CASSEGRAIN

1. Il faut que le miroir secondaire conjugue un objet virtuel (placé en  $F_1$ ) et une image réelle placée en  $F'$ . Donc il faut que l'objet ( $F_1$ ) pour le secondaire soit situé entre  $F_2$  et  $S_2$ . Dans le Cassegrain la distance algébrique entre  $H'$  et  $F'$  est positive.



$$2. \infty \xrightarrow{M1} F_1 \xrightarrow{M2} F'$$

$$\theta \xrightarrow{M1} y' = -f_1 \theta \xrightarrow{M2} y'' = g_2 y' = -g_2 f_1 \theta = f' \theta$$

Ma convention de signe impose que  $f = \overline{SF}$  donc ici  $f_1$  est négatif (-125 mm), mais la focale du télescope  $f'$  est bien positif. On a donc  $g_2 = -\frac{f'}{f_1} = +4$

$$3. g_2 = -\frac{\overline{S_2 F_2}}{\overline{F_2 F_1}} \rightarrow \overline{F_2 F_1} = 12,5 \text{ mm} \rightarrow \overline{S_1 S_2} = \overline{S_1 F_1} + \overline{F_1 F_2} + \overline{F_2 S_2} = -87,5 \text{ mm}$$

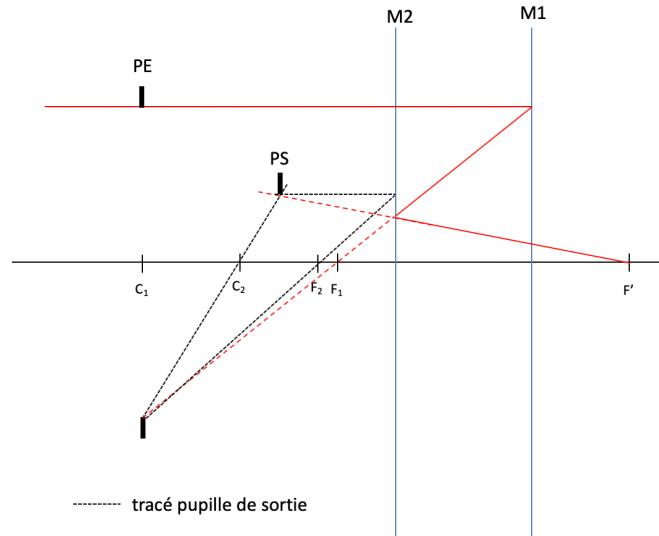
On écrit la conjugaison  $F_1 \xrightarrow{M2} F'$  (on utilise le  $g_2$ ) soit  $\overline{S_1 F'} = 62,5 \text{ mm}$

4. En dépliant le système, on se ramène à un système constitué d'une lentille mince convergente de focale +125 mm (équivalent  $M1$ ) et une lentille mince divergente de focale -50 mm (équivalent  $M2$ ). On peut appliquer la formule de Gullstrand avec la même distance focale pour tout le système soit  $f' = +500 \text{ mm}$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{\overline{O_1 O_2}}{f'_1 \times f'_2} \rightarrow \overline{O_1 O_2} = +87,5 \text{ mm} \text{ dans le système déplié. On retrouve bien la valeur équivalente dans le système plié à miroirs soit -87,5 mm}$$

5. Schéma sur l'axe (plus bas, tracé rouge)

6. La pupille d'entrée est en  $C_1$ . Donc la pupille intermédiaire est en  $C_1$  également mais inversée. La pupille de sortie est donc l'image de la pupille intermédiaire par le miroir  $M_2$ .



On sait que le système est ouvert à  $N=5$  soit  $\phi_{PE} = \frac{f'}{N} = 100 \text{ mm}$

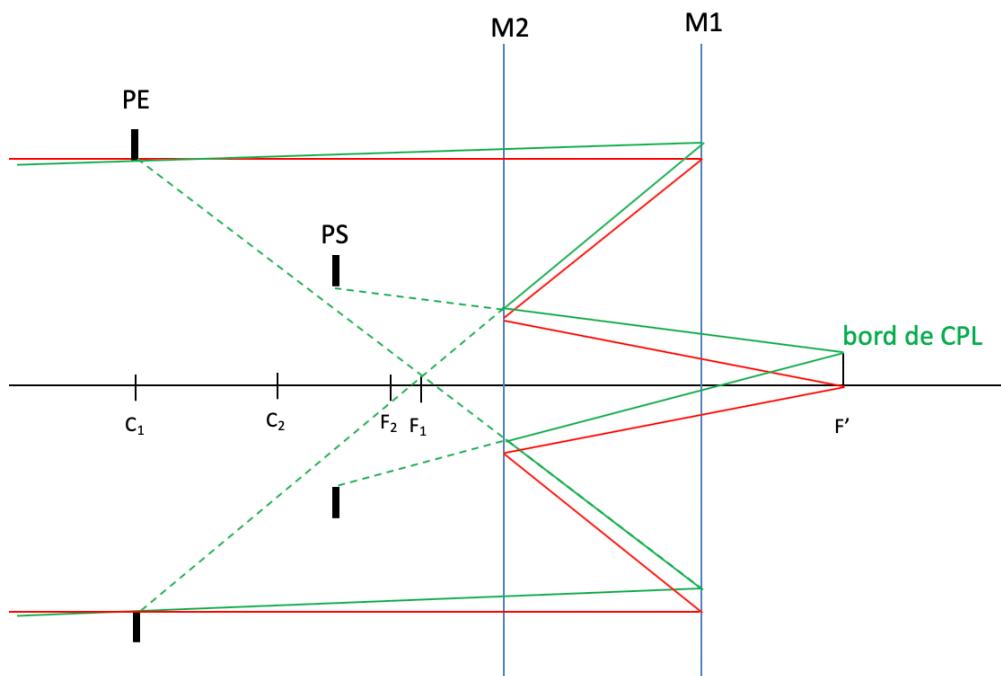
On écrit la conjugaison suivante  $P_i = -P_E \xrightarrow{M_2} P_S$

$$\frac{1}{S_2 P_E} + \frac{1}{S_2 P_S} = \frac{2}{S_2 C_2} \rightarrow \overline{S_2 P_S} = -72,2 \text{ mm} \rightarrow \phi_{PS} = \phi_{PE} \times \frac{\overline{S_2 P_S}}{\overline{S_2 P_E}} = 44,4 \text{ m}$$

7. Pour recouvrir entièrement le capteur, il faut que le diamètre du champ de pleine lumière vaut

$$\phi_{CPL-image} = 512 \times 20 \mu\text{m} \times \sqrt{2} = 14,5 \text{ mm} \rightarrow \phi_{CPL-intermédiaire} = \frac{\phi_{CPL}}{g_2} \rightarrow \theta_{CPL-objet} = \frac{\phi_{CPL-image}}{f'} = 1,7^\circ$$

8. Schéma en bord de CPL



9. Graphiquement (mesure à la règle) on trouve,

diamètre M1= 107 mm

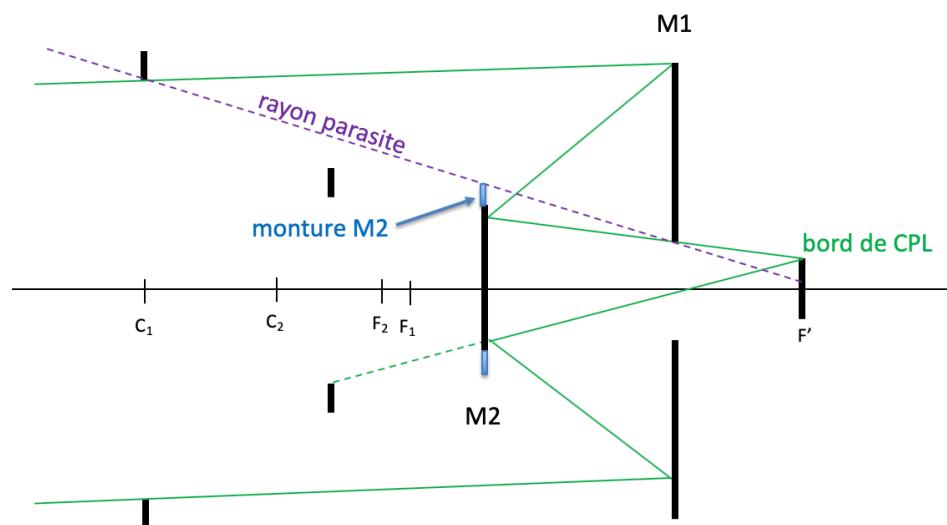
diamètre trou M1 = 23 mm

diamètre M2 = 35 mm

Pour couper les rayons parasites qui entrent dans PE et atteignent le plan focal sans passer par les miroirs, on peut augmenter le diamètre de la monture du secondaire.

diamètre monture M2 (pour couper les rayons parasites) = 50 mm

$$\text{taux d'obturation : } \tau = \left( \frac{\phi_{monture}}{\phi_{PE}} \right)^2 = 25\%$$



$$10. \phi_{airy} = 2,44\lambda N = 6 \mu m < pixel \rightarrow \delta\theta_{objet} = \frac{pixel}{f'} = 40 \mu rad = 8''$$

$$11. E_{image} = T_{transmission} \times \frac{\pi L}{4N^2} = \mathcal{R}_{M1} \times \mathcal{R}_{M2} \times (1 - \tau) \times \frac{\pi L}{4N^2} = 226 W.m^{-2}$$

## CORRECTION GREGORY

Dans le Grégory la distance algébrique entre H' et F' est négative.

$$g_2 = -\frac{f'}{f_1} = -\frac{-1000}{-250} = -4$$

$$g_2 = -\frac{\overline{S_2 F_2}}{\overline{F_2 F_1}}$$

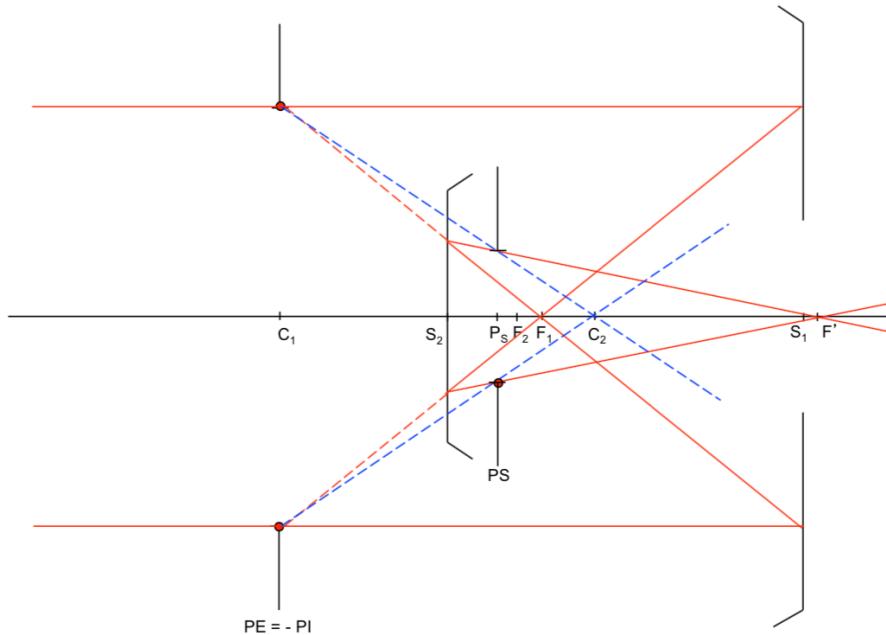
$$\rightarrow \overline{F_2 F_1} = 17,5 \text{ mm} \rightarrow \overline{S_1 S_2} = \overline{S_1 F_1} + \overline{F_1 F_2} + \overline{F_2 S_2} = -250 - 17,5 - 70 = -337,5 \text{ mm}$$

On écrit la conjugaison  $F_1 \xrightarrow{M^2} F'$  (ou utilise le  $g_2$ ) soit  $\overline{S_1 F'} = +12,5 \text{ mm}$

### 1. Schéma pupille de sortie

On écrit la conjugaison suivante  $P_i = -P_E = C_1 \xrightarrow{M^2} P_S$

$$\frac{1}{\overline{S_2 P_E}} + \frac{1}{\overline{S_2 P_S}} = \frac{2}{\overline{S_2 C_2}} \rightarrow \overline{S_2 P_S} = 49 \text{ mm} \rightarrow \phi_{PS} = \phi_{PE} \times \frac{\overline{S_2 P_S}}{\overline{S_2 P_E}} = 30 \text{ mm}$$



### 2. Schéma sur l'axe

3. Diamètre image du CPL :  $\phi_{CPL-image} = f' \times \theta_{CPL-objet} = 35 \text{ mm}$

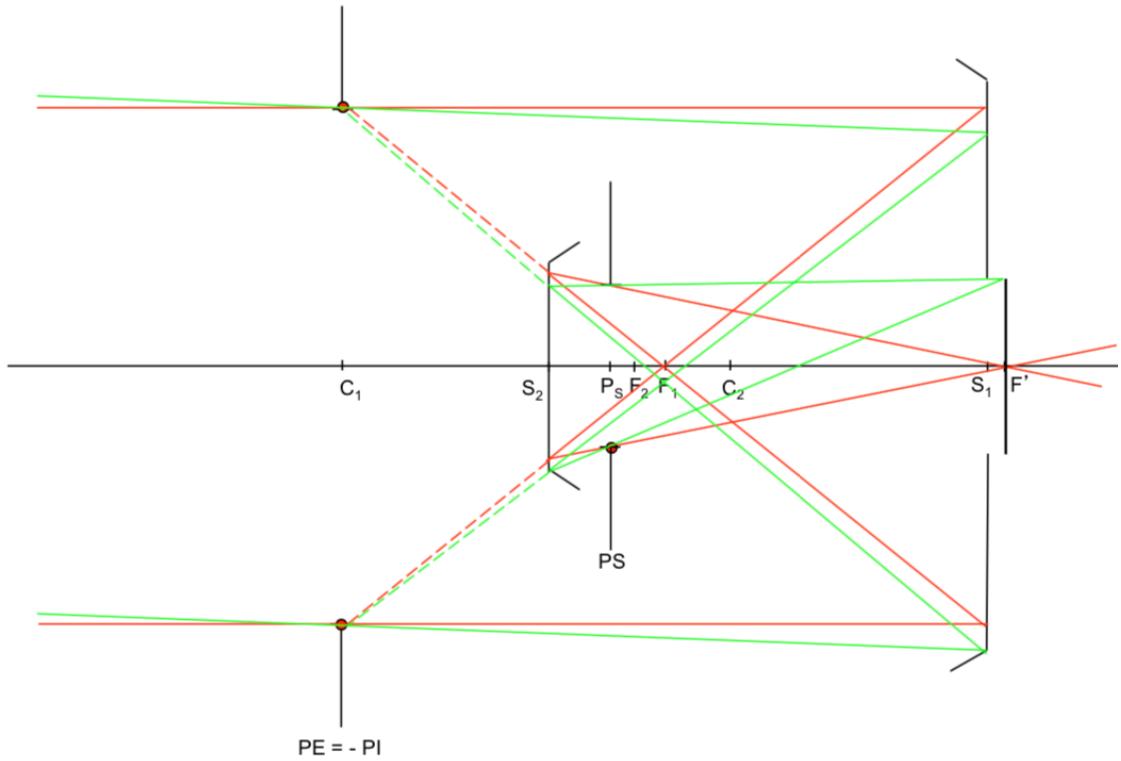
### 4. Schéma en bord de CPL

5. Graphiquement (mesure à la règle) on trouve,

diamètre  $M_1 \sim 124 \text{ mm}$

diamètre trou  $M_1 \sim 35 \text{ mm}$

$$\text{diamètre } M_2 \sim 36 \text{ mm} \rightarrow \tau_{obturation} = \left( \frac{\phi_{M_2}}{\phi_{PE}} \right)^2 = 13\%$$



6. On veut que la dilatation  $\varepsilon$  soit inférieure ou égale à la profondeur de champ du secondaire  $dz$  qui est imposée par la taille du pixel. On a dans l'espace image (côté  $F'$ ), une profondeur de foyer  $dz'$ ,

$$dz' \approx \frac{pixel}{ON'} = pixel \frac{P_S F'}{\phi_{PS}/2}$$

La profondeur de champ (côté objet de  $M_2$ ) vaut alors,

$$dz(\geq \varepsilon) = \frac{dz'}{g_z} = \frac{dz'}{(g_{y-M2})^2} = \frac{dz'}{16} = pixel \frac{P_S F'}{8\phi_{PS}} = 20\mu m \frac{-48,9 + 350 mm}{8 \times 30 mm} = 25 \mu m$$