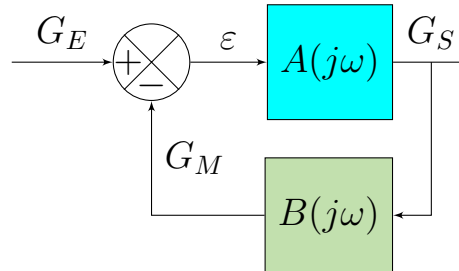


TD Asservissement - Systèmes en boucle fermée

Pour les exercices 1, 2 et 3, on considérera le schéma bloc suivant :



Exercice 1 - Boucle ouverte et boucle fermée - Ordre 0

Pour cet exercice, on considérera les fonctions de transfert suivantes :

$$A(j\omega) = K_A \text{ et } B(j\omega) = K_B$$

1. Donnez l'expression de G_S en fonction de G_E , en **boucle ouverte**.
2. Donnez l'expression de G_M en fonction de G_E , en **boucle ouverte**.
3. Donnez l'expression de la **fonction de transfert** $H(j\omega) = G_S/G_E$, en **boucle fermée**.
4. Calculez la **fonction de transfert** pour les valeurs suivantes de K_A et K_B :
 - $K_A = 1$ et $K_B = 1$
 - $K_A = 10$ et $K_B = 1$
 - $K_A = 100$ et $K_B = 1$
 - $K_A = 1$ et $K_B = 10^{-2}$
 - $K_A = 10^7$ et $K_B = 10^{-4}$ (cas amplificateur inverseur par exemple)
5. Quelles sont les limites de H lorsque $K_A K_B \gg 1$? Lorsque $K_A K_B \ll 1$?

Réponse

Question 1

En boucle ouverte, $\varepsilon = G_E$ (le lien entre G_M et le comparateur est ouvert).

On a alors : $G_S = A(j\omega)G_E$

Question 2

De la même façon, on a alors : $G_M = A(j\omega)B(j\omega)G_E$

Question 3

En boucle fermée :

- $\varepsilon = G_E - G_M$
- $G_M = B(j\omega)G_S$
- $G_S = A(j\omega)\varepsilon$

On a alors : $G_S = A(j\omega)(G_E - G_M) = A(j\omega)(G_E - B(j\omega)G_S)$

Ainsi :

$$H(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega)B(j\omega)}$$

Question 4

Pour $K_A = 1$ et $K_B = 1$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 1 \times 1} = \frac{1}{2}$$

Pour $K_A = 10$ et $K_B = 1$:

$$H(j\omega) = \frac{10}{1 + 10 \times 1} = \frac{10}{11}$$

Pour $K_A = 100$ et $K_B = 1$:

$$H(j\omega) = \frac{100}{1 + 100 \times 1} = \frac{100}{101} \approx 1$$

Pour $K_A = 1$ et $K_B = 10^{-2}$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 1 \times 10^{-2}} = \frac{100}{101} \approx 1$$

Pour $K_A = 10^7$ et $K_B = 10^{-4}$:

$$H(j\omega) = \frac{10^7}{1 + 10^7 \times 10^{-4}} = \frac{10^7}{1001} \approx 10^4$$

Question 5

$$H = \frac{1}{1 + K_B}$$

Lorsque $K_A K_B \gg 1$ (i.e. $K_B \rightarrow \infty$) , $H \rightarrow \frac{1}{K_B}$

Lorsque $K_A K_B \ll 1$ (i.e. $K_B \rightarrow 0$) , $H \rightarrow K_A$

Exercice 2 - Boucle ouverte et boucle fermée - Ordre 1

Pour cet exercice, on considérera les fonctions de transfert suivantes :

$$A(j\omega) = \frac{K_A}{1+T_A j\omega} \text{ et } B(j\omega) = K_B$$

1. Donnez l'expression de la **fonction de transfert** $H(j\omega) = G_S/G_E$, en **boucle fermée**.
2. Mettez cette expression sous **forme canonique** et donnez les **principales caractéristiques** du système obtenu.
3. Calculez ces valeurs caractéristiques pour les valeurs suivantes de K_A , K_B et T_A :
 - $K_A = 1$, $K_B = 1$ et $T_A = 100$ ms
 - $K_A = 10$, $K_B = 1$ et $T_A = 100$ ms
 - $K_A = 10^7$, $K_B = 10^{-4}$ et $T_A = 100$ ms (cas amplificateur inverseur par exemple)

Réponse

Question 1

En boucle fermée, on repart de l'expression obtenue dans l'exercice 1 :

$$H(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega)B(j\omega)}$$

En remplaçant $A(j\omega)$ et $B(j\omega)$ par leurs expressions, on trouve :

$$H(j\omega) = \frac{K_A}{1 + K_A K_B + T_A j\omega}$$

Question 2

La mise sous forme canonique (fonction de transfert de type passe-bas du premier ordre) donne l'expression suivante :

$$H(j\omega) = \frac{K_A}{1 + K_A K_B} \frac{1}{1 + \frac{T_A}{1 + K_A K_B} j\omega}$$

On peut alors donner la constante de temps de ce système et le gain statique :

$$T_H = \frac{T_A}{1 + K_A K_B}$$

$$H_0 = \frac{K_A}{1 + K_A K_B}$$

Question 3

Pour $K_A = 1$, $K_B = 1$ et $T_A = 100$ ms :

$$T_H = \frac{100 \text{ ms}}{1+1} = 50 \text{ ms}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}$$

Pour $K_A = 10$, $K_B = 1$ et $T_A = 100$ ms :

$$T_H = \frac{100 \text{ ms}}{1+10} = 9 \text{ ms}$$

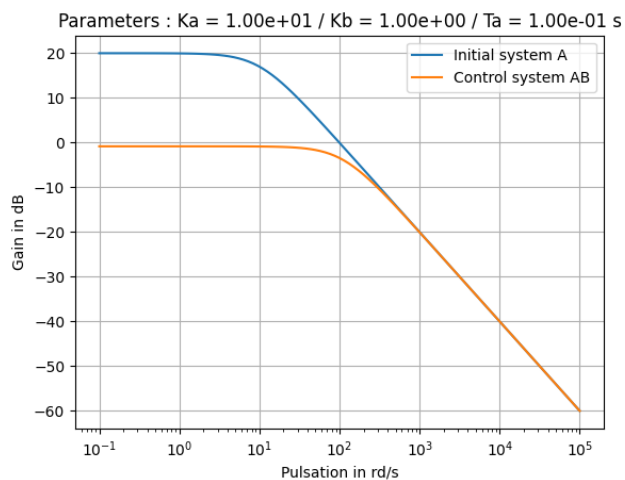
$$H_0 = \frac{1}{11}$$

Pour $K_A = 10^7$, $K_B = 10^{-4}$ et $T_A = 100$ ms :

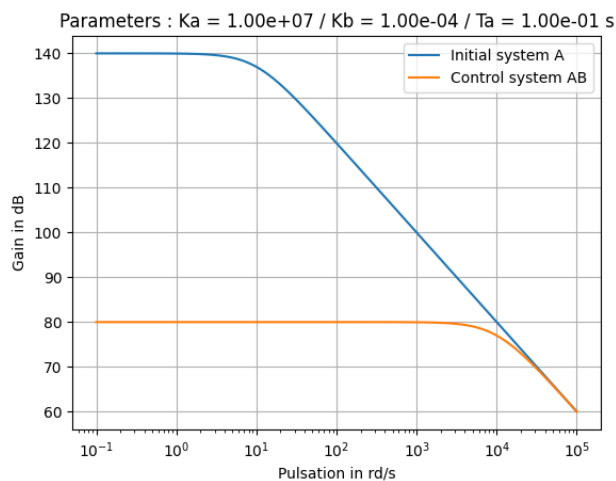
$$T_H = \frac{100 \text{ ms}}{1+10^7 \times 10^{-4}} \approx 100 \text{ } \mu\text{s}$$

$$H_0 = \frac{10^7}{1+10^7 \times 10^{-4}} \approx 10^4$$

On peut regarder le **diagramme de Bode en gain** pour ces trois systèmes, en comparant le système initial (A) et le système rebouclé (A-B) :



Exemple du système 2 : $K_A = 10$, $K_B = 1$ et $T_A = 100$ ms

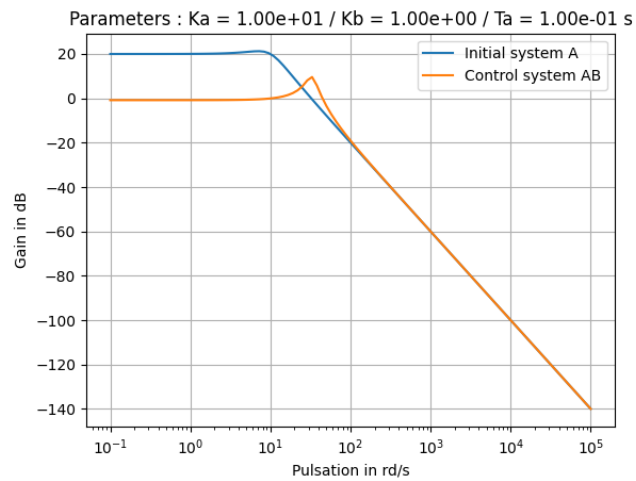


Exemple du système 3 : $K_A = 10^7$, $K_B = 10^{-4}$ et $T_A = 100$ ms

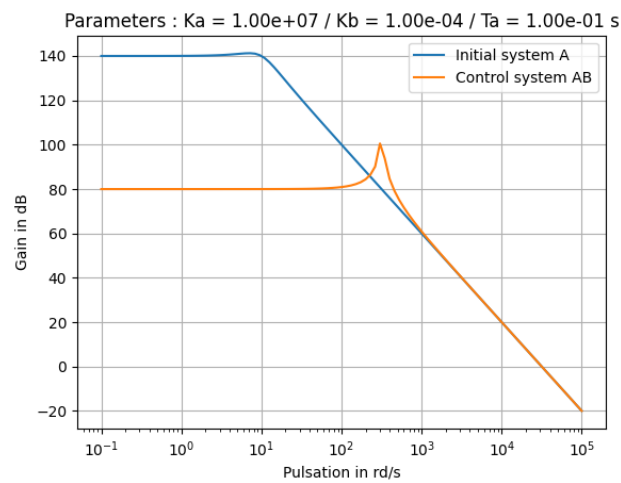
Et si A est d'ordre 2 ?

De type :

$$H(j\omega) = \frac{K_A}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$



Exemple du système 2 : $K_A = 10$, $m = 0.5$, $K_B = 1$ et $T_A = 100$ ms



Exemple du système 3 (ALI) : $K_A = 10^7$, $m = 0.5$, $K_B = 10^{-4}$ et $T_A = 100$ ms

Exercice 3 - Boucle ouverte et boucle fermée - Ordre 1

Pour cet exercice, on considérera les fonctions de transfert suivantes :

$$A(j\omega) = K_A \text{ et } B(j\omega) = \frac{K_B}{1+T_B j\omega}$$

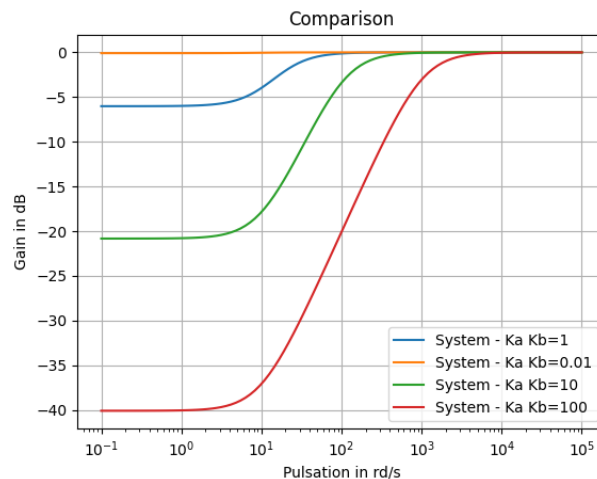
On donne l'expression suivante pour $H(j\omega) = G_S/G_E$:

$$H(j\omega) = \frac{K_A}{1 + K_A K_B} \cdot \frac{1 + T_B j\omega}{1 + \frac{T_B}{1+K_A K_B} j\omega}$$

- Tracez le gain de cette fonction de transfert dans les deux conditions suivantes :
 - $K_A K_B > 1$
 - $K_A K_B < 1$
- Donnez également l'expression du gain statique de ce système dans les deux conditions précédentes.
- Donnez également l'expression du rapport de la constante de temps du système bouclé sur celle du système A dans les deux conditions précédentes.

Réponse

Question 1



Comparaison du diagramme de Bode en gain en fonction du produit des paramètres K_A et K_B

Question 2

On trouve :

$$H_0 = \frac{K_A}{1 + K_A K_B}$$

Si $K_A K_B \gg 1$ alors $H_0 \rightarrow 1/K_B$

Si $K_A K_B \ll 1$ alors $H_0 \rightarrow K_A$

Question 3

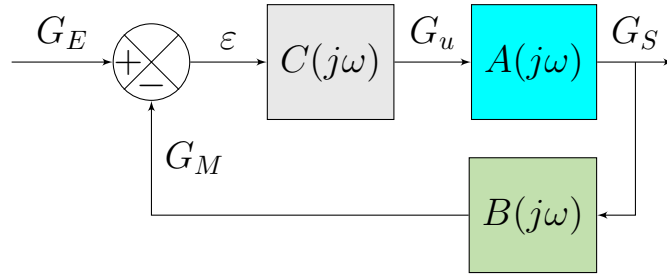
On trouve :

$$R = \frac{\frac{T_B}{1+K_A K_B}}{T_B} = \frac{1}{1 + K_A K_B}$$

Si $K_A K_B \gg 1$ alors $R \rightarrow \frac{1}{K_A K_B} \rightarrow 0$

Si $K_A K_B \ll 1$ alors $R \rightarrow 1$

Pour les exercices 4 et 5, on considérera le schéma bloc suivant :



Exercice 4 - Correcteur P

Pour cet exercice, on considérera les fonctions de transfert suivantes :

$$A(j\omega) = \frac{K_A}{1+T_A j\omega}, B(j\omega) = K_B \text{ et } C(j\omega) = K_C$$

1. Donnez l'expression de G_M en fonction de G_E , en **boucle ouverte**.
2. Donnez l'expression de la **fonction de transfert** $H(j\omega) = G_S/G_E$, en **boucle fermée**.
3. Mettez cette expression sous **forme canonique** et donnez les **principales caractéristiques** du système obtenu.
4. Calculez ces valeurs caractéristiques pour les valeurs suivantes de K_A , K_B et T_A :
 - $K_A = 1$, $K_B = 1$, $K_C = 10$ et $T_A = 100$ ms
 - $K_A = 1$, $K_B = 10^{-2}$, $K_C = 10$ et $T_A = 100$ ms

Réponse

Question 1

En boucle ouverte, $\varepsilon = G_E$ (le lien entre G_M et le comparateur est ouvert).

On a alors : $G_S = A(j\omega)C(j\omega)G_E$

Et $G_M = A(j\omega)B(j\omega)C(j\omega)G_E$

Question 2

En boucle fermée :

- $\varepsilon = G_E - G_M$
- $G_M = B(j\omega)G_S$
- $G_S = A(j\omega)C(j\omega)\varepsilon$

On obtient :

$$H(j\omega) = \frac{A(j\omega)C(j\omega)}{1 + A(j\omega)B(j\omega)C(j\omega)}$$

En remplaçant $A(j\omega)$, $B(j\omega)$ et $C(j\omega)$ par leurs expressions, on trouve :

$$H(j\omega) = \frac{K_A K_C}{1 + K_A K_B K_C + T_A j\omega}$$

Question 3

La mise sous forme canonique (fonction de transfert de type passe-bas du premier ordre) donne l'expression suivante :

$$H(j\omega) = \frac{K_A K_C}{1 + K_A K_B K_C} \frac{1}{1 + \frac{T_A}{1 + K_A K_B K_C} j\omega}$$

On peut alors donner la constante de temps de ce système et le gain statique :

$$T_H = \frac{T_A}{1 + K_A K_B K_C}$$

$$H_0 = \frac{K_A K_C}{1 + K_A K_B K_C}$$

Question 4

Pour $K_A = 1$, $K_B = 1$, $K_C = 10$ et $T_A = 100$ ms :

$$T_H = \frac{100 \text{ ms}}{1+10} = 9 \text{ ms}$$

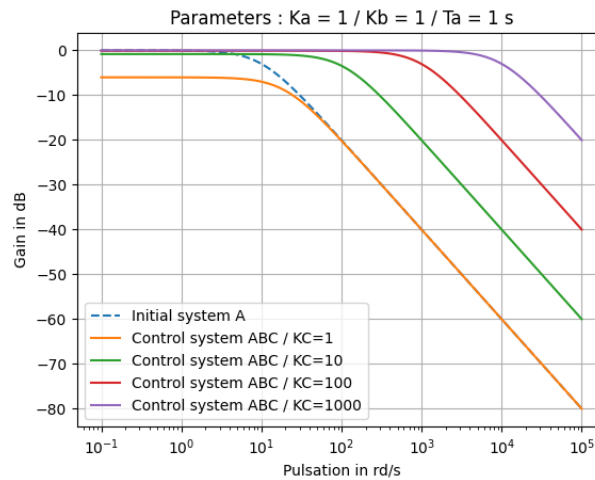
$$H_0 = \frac{10}{11}$$

Pour $K_A = 1$, $K_B = 10^{-2}$, $K_C = 10$ et $T_A = 100$ ms :

$$T_H = \frac{100 \text{ ms}}{1+10^{-1}} = \frac{10}{11} \times 100 \text{ ms} \approx 90 \text{ ms}$$

$$H_0 = \frac{100}{11}$$

Diagramme de Bode



Comparaison du diagramme de Bode en gain en fonction de la valeur du gain du correcteur proportionnel (K_C)

Conclusion sur rebouclage et correcteur

Le rebouclage (ou asservissement) a pour effet :

- une vue sur la sortie
- une fonction de transfert du système global qui dépend du système à piloter et du système de mesure

Ce rebouclage impacte le **gain du montage** global et le **temps de réponse** global du montage.

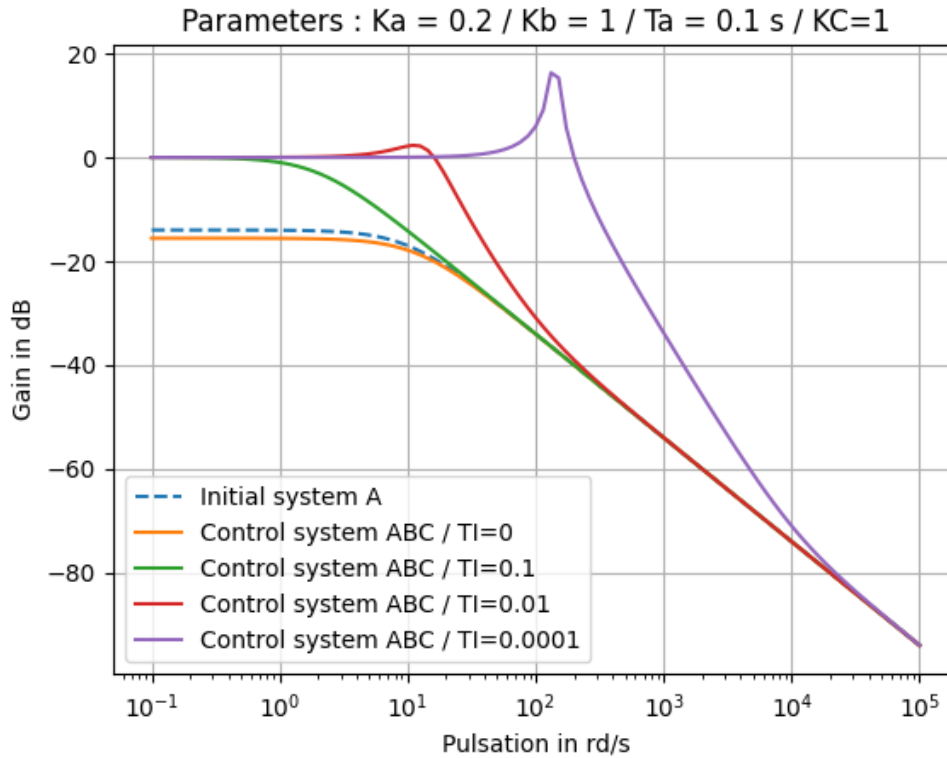
L'ajout d'un **correcteur** (gain pour l'instant) permet de réduire l'erreur statique (pour un correcteur proportionnel $K_C \rightarrow \infty$) et de réduire le temps de réponse.

Exercice 5 - Correcteur PI

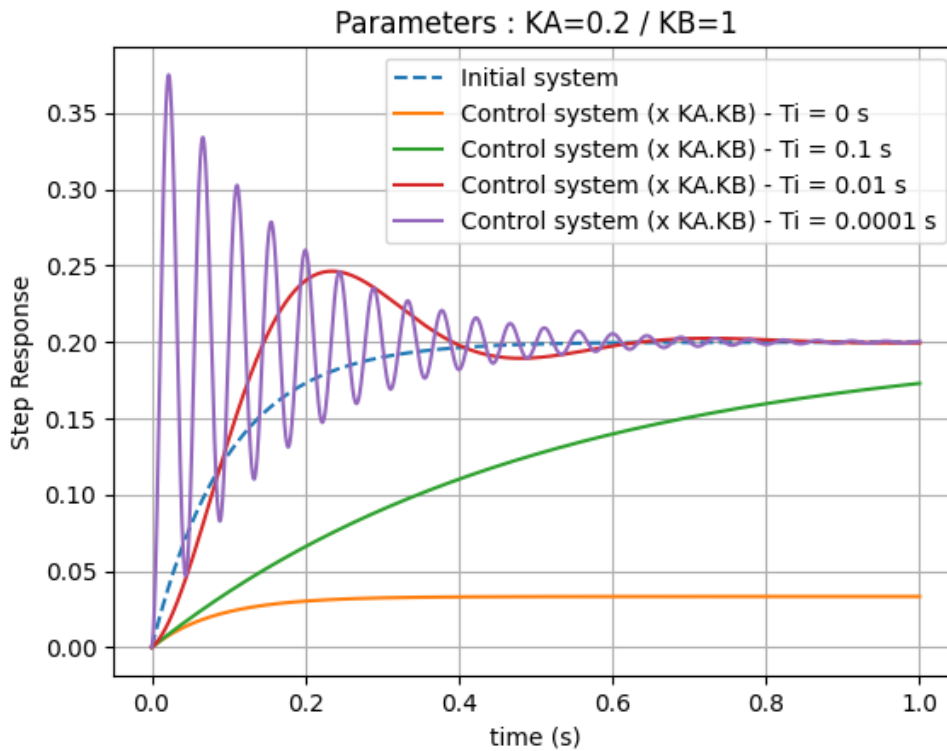
Pour cet exercice, on considérera les fonctions de transfert suivantes :

$$A(j\omega) = \frac{K_A}{1+T_A j\omega}, B(j\omega) = K_B \text{ et } C(j\omega) = K_C + \frac{1}{T_I j\omega}$$

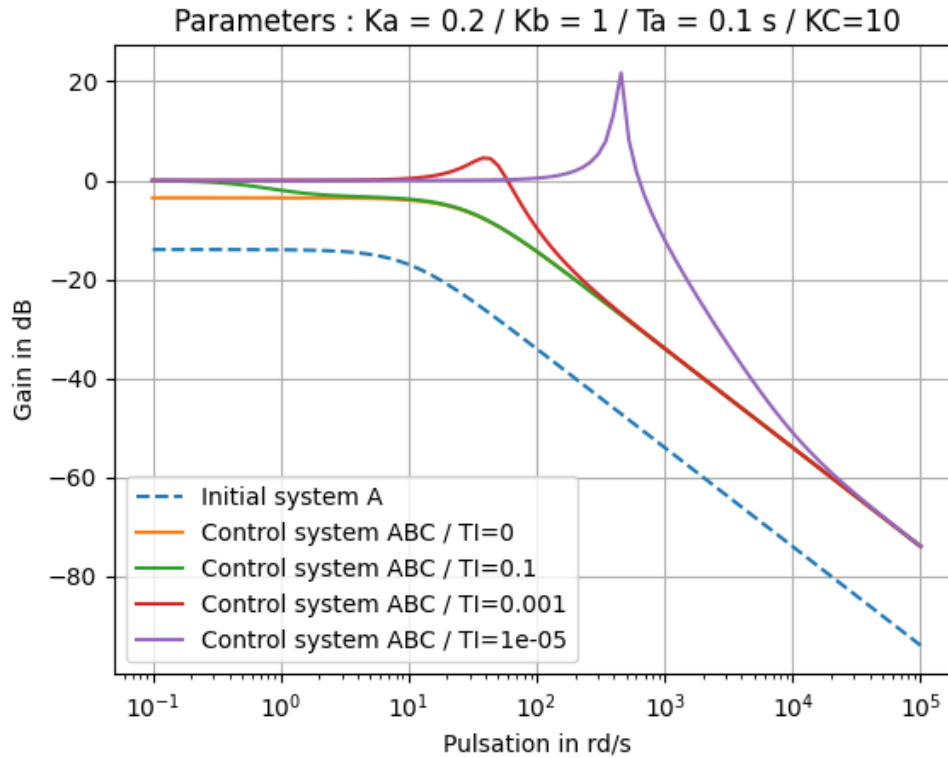
1. Comparez les diagrammes de Bode en gain et les réponses indicielles suivants.
2. Concluez sur le rôle des correcteurs proportionnel et intégral.



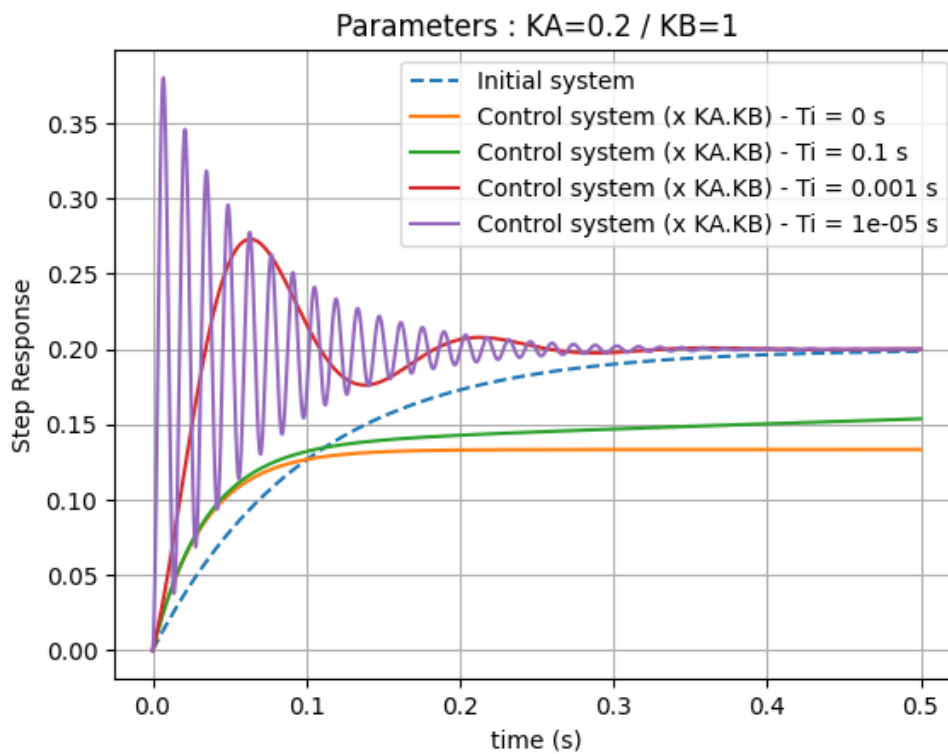
Comparaison du diagramme de Bode en gain en fonction de la constante de temps de l'intégrateur - $K_C = 1$.



Comparaison de la réponses indicielle en fonction de la constante de temps de l'intégrateur - $K_C = 1$.



Comparaison du diagramme de Bode en gain en fonction de la constante de temps de l'intégrateur - $K_C = 10$.



Comparaison de la réponses indicielle en fonction de la constante de temps de l'intégrateur - $K_C = 10$.