Transformée de Fourier et FFT

Fabienne Bernard

3 avril 2020

Etude d'un cas simple

Résolution de la FFT

On échantillonne un signal $s(t)$ à la fréquence $\nu_E = 8192\,\mathrm{Hz}$ pendant un temps T. On obtient N échantillons.

Q1 Quelle doit être la durée T de l'échantillonnage pour que le spectre calculé par TFD sur le nombre de points N comporte une raie par Hertz ?

N points entre 0 et $T \implies N$ points entre 0 et F_e. Les points de la TFD sont donc espacés de $\Delta\nu = \frac{F_e}{N} = \frac{F_e}{T/T_e} = \frac{1}{T} = 1\,\mathrm{s}$ .Attention la résolution ne dépend pas de la fréquence d'échantillonnage mais seulement de la durée d'observation !

Relation entre TF et FFT

Après échantillonnage pendant la durée T et conversion en un signal numérique, la séquence $s_d[n]$obtenue est une suite de nombres de longueur N. On définit alors la quantité :

$$\widetilde{s_d}\left(f\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s_d\left[n\right] e^{-j2\pi f n},$$

construite à partir de la séquence $s_d[n]$ (elle porte le nom de TF à temps discret, c'est une fonction périodique de période 1).

Q2 Exprimer le lien entre $\widetilde{s_d}\left(f\right)$ et le résultat du calcul de la TFD.

D'après la définition de la TFD, elle est un échantillonnage de $\widetilde{s_d}(f)$:

$$TFD_{s_d}[m] = \widetilde{s_d}\left(\frac{m}{N}\right)$$

Q3 Exprimer la relation liant $\widetilde{s_d}$ et $\widetilde{s}$. On pourra utiliser le fait que $x(t)Ш_{T_e}$ peut s'écrire $\sum x(nT_e)\,\delta(t-nT_e)$.

On part du signal (tronqué et échantillonné) modélisé par une distribution (peigne de Dirac) et on en calcule la TF .
Soit le signal

$$f(t) = s(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)Ш_{T_e}$$

Sa TF est donc

$$\widetilde{s} \circledast T\mathrm{sinc}\,(T\nu) \circledast Ш_{\frac{1}{T_e}}$$

or

$$\begin{aligned} f(t) &= s(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\sum \delta(t-nT_e) \\ &= \sum s(nT_e)\mathrm{rect}\left(\frac{nT_e}{T}\right).\delta(t-nT_e) \\ &= \sum s_d[n]\,\delta(t-nT_e) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \widetilde{f(\nu)} &= \sum s_d[n]\,\mathbf{TF}[\delta(t-nT_e)] \\ &= \sum s_d[n]\,e^{-j2\pi\nu nTe} \\ &= \widetilde{s_d}(\nu Te) \end{aligned}$$

d'où :

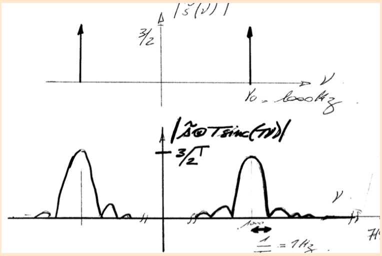
$$\begin{aligned} \widetilde{s_d}(\nu Te) &= \widetilde{s} \circledast T\ \mathrm{sinc}\,(T\nu) \circledast Ш_{\frac{1}{T_e}} \\ &= \sum_k (\widetilde{s} \circledast T\ \mathrm{sinc}\,(T\nu))\left(\nu - \frac{k}{T_e}\right) \end{aligned}$$

Cette formule signifie que $\widetilde{s_d}$ est une version périodisée, et convoluée par une fonction sinus cardinal, du spectre initial $\widetilde{s}$.

FFT d'un signal sinusoïdal

Q4 Représenter l'allure de $\widetilde{s_d}\,(f)$ si le signal $s(t)$ est une sinusoïde pure, de fréquence $\nu_0 = 1000$ Hz et d'amplitude 3. En déduire les raies données par le calcul de TFD dans le voisinage de ν_0. On précisera leurs amplitudes exactes.

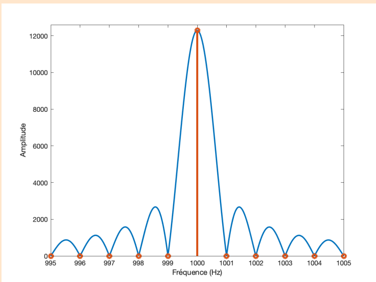
Pour $\widetilde{s_d}\,(f)$, on retrouve donc des "sinc" à 7192, 9192, ...$k*8192 \pm 1000$. Leur amplitude est $\frac{3}{2}T\frac{1}{T_e} = \frac{3}{2}N$.



;

Allure de $|\widetilde{s}\,(f)\,|$ et $|\widetilde{s_d}\,(f)\,|$

Pour la FFT autour de 1000 Hz :



;

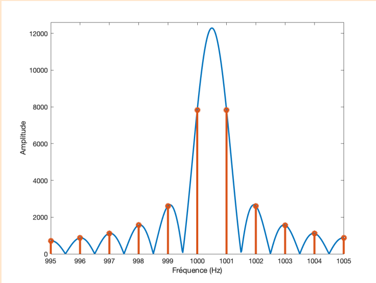
$|\widetilde{s}\,(f)\,|$ en bleu et FFT en orange.

Les rebonds de la fonction "sinus cardinal" sont invisibles, caché par l'échantillonnage !

FFT d'un signal sinuoïdal. Cas problématique.

À amplitude constante, la fréquence du signal $s(t)$ est modifiée pour passer à $\nu_0 = 1000.5$ Hz.

Q5 Représenter alors l'allure des raies données par le calcul de TFD au voisinage de ν_0.



;
$|\widetilde{s}(f)|$ en bleu et FFT en orange.

Les positions des échantillons (oranges) restent identiques, mais cette fois la position du "sinus cardinal" d'est décalée autour de $1000.5\,\mathrm{Hz}$. Au lieu d'un pic étroit, le spectre calculé par FFT affiche une courbe large, et dont l'amplitude ne donne pas une valeur correcte de l'amplitude de la sinusoïde.

Q6 La variation observée entre les questions 2 et 3 serait-elle plus ou moins marquée si on utilisait une fenêtre plus longue ? Si on augmentait la fréquence d'échantillonnage ?

Si T augmente N augmente aussi mais le sinus cardinal devient plus étroit, donc le problème de l'amplitude incorrecte du pic reste inchangé. Si T reste identique et F_e augmente , N augmente mais l'horizon $[0, F_e]$ augmente de la même façon. Le problème reste inchangé.